NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DÉSIRÉ ANDRÉ

Note sur la méthode des isopérimètres

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 128-130

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__128_0>

NOTE SUR LA MÉTHODE DES ISOPÉRIMÈTRES;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

1. Tout le monde sait que le procédé pour calculer π, connu sous le nom de *méthode des isopérimètres*, repose sur la résolution du problème suivant :

Étant donnés le rayon et l'apothème d'un polygone régulier, trouver le rayon et l'apothème du polygone régulier ayant même périmètre, mais un nombre double de côtés.

Ce problème résolu, on part d'un polygone régulier quelconque, et l'on considère la suite indéfinie des polygones réguliers isopérimètres dont le nombre des côtés va constamment en doublant.

2. Dans cette suite, il est évident que les rayons vont en diminuant, que les apothèmes, au contraire, vont en augmentant, et l'on démontre, dans tous les cours, que, si l'on considère deux polygones consécutifs :

La différence entre le nouveau rayon et le nouvel apothème est moindre que le quart de la différence entre l'ancien rayon et l'ancien apothème.

3. L'idée nous est venue de considérer, d'une part, la suite indéfinie des rayons; de l'autre, la suite indéfinie des apothèmes. Nous avons été conduit ainsi aux deux théorèmes suivants, qui nous semblent nouveaux.

4. THÉORÈME. — *Dans la suite indéfinie des rayons, si l'on retranche chaque rayon du précédent, l'une*

quelconque des différences obtenues est moindre que le quart de la précédente.

En effet, désignons par r_1, r_2, r_3 les rayons de trois polygones consécutifs, et par a_2, a_3 les apothèmes des deux derniers; nous avons, comme on sait :

$$r_2 = \sqrt{a_2 r_1},$$

$$r_3 = \sqrt{a_3 r_2},$$

$$a_3 = \tfrac{1}{2}(a_2 + r_2).$$

Éliminons a_2 et a_3 entre ces trois équations, nous arrivons à l'égalité

$$r_2^3 + r_2^2 r_1 = 2 r_3^2 r_1,$$

laquelle peut s'écrire

$$\frac{r_2 - r_3}{r_1 - r_2} = \frac{r_3}{r_1 + r_2}\,\frac{r_3}{r_2 + r_3}.$$

Or les rayons vont en diminuant; donc chacun des rapports $\frac{r_3}{r_1 + r_2}$, $\frac{r_3}{r_2 + r_3}$ est moindre que $\frac{1}{2}$; donc le second membre de la dernière égalité est inférieur à $\frac{1}{4}$; donc on a

$$r_2 - r_3 < \tfrac{1}{4}(r_1 - r_2),$$

ce qu'il fallait démontrer.

5. Théorème. — *Dans la suite indéfinie des apothèmes, si l'on retranche chaque apothème du suivant, l'une quelconque des différences obtenues est moindre que le quart de la précédente.*

En effet, désignons par a_1, a_2, a_3 les apothèmes de trois polygones consécutifs, et par r_1, r_2 les rayons des deux premiers; nous avons, comme on sait,

$$a_2 = \tfrac{1}{2}(a_1 + r_1),$$

$$a_3 = \tfrac{1}{2}(a_2 + r_2),$$

$$r_2 = \sqrt{a_2 r_1}.$$

Éliminons r_1 et r_2 entre ces trois équations ; nous trouvons l'équation suivante :

$$(2a_3 - a_2)^2 = a_2(2a_2 - a_1),$$

qui peut s'écrire

$$\frac{a_3 - a_2}{a_2 - a_1} = \frac{1}{4}\,\frac{a_2}{a_3}.$$

Comme les apothèmes vont en croissant, le rapport $\frac{a_2}{a_3}$ est moindre que l'unité ; donc le second membre de notre dernière égalité est inférieur à $\frac{1}{4}$; donc on a

$$a_3 - a_2 < \tfrac{1}{4}(a_2 - a_1),$$

ce qu'il fallait démontrer.

6. *Remarque.* — Les démonstrations précédentes montrent évidemment que, dans la suite des rayons comme dans celle des apothèmes, le rapport des différences considérées non-seulement est toujours moindre que $\frac{1}{4}$, mais qu'il tend vers cette limite $\frac{1}{4}$ lorsque le nombre des côtés du polygone croît indéfiniment.