NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LOUIS SALTEL

Théorèmes sur les coniques et sur les surfaces de second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 89-92

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__89_1>

THÉORÈMES SUR LES CONIQUES ET SUR LES SURFACES DE SECOND ORDRE;

PAR M. LOUIS SALTEL.

I.

Prenons à volonté une conique S définie par cinq points P, A, B, 1, 2; menons les rayons (P1), (P2), et imaginons les cercles (AB1), (AB2); soient 1′ et 2′ leurs seconds points d'intersection avec ces rayons; si l'on considère le cercle Σ défini par les trois points P, 1′, 2′, on peut énoncer les divers théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Par les points* A, B, *faites passer un cercle arbitraire* λ, *qui coupe le cercle* Σ *en* a, b; *menez les rayons* PA, PB, *et soient* A′, B′ *les seconds points d'intersection de ces rayons avec le cercle* λ : *les points* A′, B′ *sont deux points de la conique* S.

Remarque. — Ce théorème donne une solution de ce problème :

Construire la conique S *définie par cinq points.*

THÉORÈME II. — *Si l'on joint les points de rencontre de la droite* AB *avec le cercle* Σ *au point* P, *les deux droites ainsi obtenues sont les directions asymptotiques de la conique* S. *Conséquemment, la conique* S *sera une hyperbole, une parabole ou une ellipse, suivant que la droite* AB *rencontrera, touchera ou ne rencontrera pas le cercle* Σ.

Remarque. — Ce théorème donne une solution immédiate de ces trois problèmes :

1° *Étant donnés cinq points d'une conique, déterminer la forme de la courbe sans la construire.*

2° *Construire une parabole, connaissant quatre points.*

3° *Construire une hyperbole équilatère, connaissant quatre points.*

Théorème III. — 1° *La tangente à la conique* S *en l'un des points* A, B, *au point* A, *par exemple, est la tangente en ce point au cercle passant par les points* A, B *et par le second point de rencontre du cercle* Σ *avec* PA. 2° *La tangente en* P *est la droite qui passe par le second point de rencontre des deux cercles* Σ *et* (PAB).

Nota. — Si l'on joint deux à deux les points de rencontre des tangentes en A, B, P au milieu des cordes déterminées par les mêmes points, les droites obtenues passeront par le centre; de là la détermination de ce point.

Remarque. — Les trois points P, A, B étant quelconques, il résulte du théorème précédent la construction de la tangente en un point quelconque de S.

Théorème IV. — *Les bissectrices des angles des deux droites* AB, A′B′ *sont les directions des axes de la courbe.*

Remarque. — Pour obtenir la grandeur des axes, on n'aura, d'après ce théorème, qu'à recourir à la solution de ce problème :

Une conique étant définie par cinq points, trouver son intersection avec une droite.

Théorème V. — *Si l'on suppose les deux points* A, B *confondus en* A *suivant la direction* AB, *le cercle tangent en* A *à cette droite et passant par le second point* *de rencontre de* PA *avec* Σ *est le cercle osculateur en ce point de la courbe.*

Remarque. — L'hypothèse que l'on vient de faire étant toujours possible, d'après le théorème III, il en résulte la construction suivante du cercle osculateur en un point A d'une conique définie par ce point, sa tangente AT et trois points P, 1, 2 :

Règle. — *Par chacun des points* 1, 2, *menez le cercle tangent en* A *à la droite* AT; *soient* 1′, 2′ *les seconds points d'intersection de ces cercles avec* (P 1), (P 2); *le cercle osculateur en* A *est le cercle tangent en ce point à* AB, *et passant par le second point de rencontre du cercle* (P 1′ 2′) *avec la droite* PA.

II.

Prenons à volonté dans l'espace une surface du second ordre V, définie par une section circulaire C et quatre points P, 1, 2, 3; menons les rayons (P 1), (P 2), (P 3), et imaginons les sphères déterminées par le cercle C et par les points 1, 2, 3; soient 1′, 2′, 3′ leurs seconds points d'intersection avec ces sphères; si l'on considère la sphère Σ déterminée par les quatre points P, 1′, 2′, 3′, on peut énoncer les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Par le cercle* C, *faites passer une sphère quelconque* A, *coupant la sphère* Σ *suivant un cercle* C_1; *menez le cône qui a pour sommet le point* P *et pour base le cercle* C_1, *et soit* C′ *le second cercle d'intersection de ce cône avec la sphère* λ : *le cercle* C′ *est une nouvelle section circulaire de la surface* V.

Théorème II. — *Le cône qui a pour sommet le point* P *et pour base le cercle d'intersection du plan* C *avec la sphère* Σ *est le cône asymptotique de la surface; conséquemment, la surface* V *est un hyperboloïde, un parabo-*

loïde elliptique ou un ellipsoïde, suivant que le plan du cercle C *rencontre, touche ou ne rencontre pas la sphère* Σ.

Remarque. — Ce théorème donne une solution de ce problème :

Construire un paraboloïde elliptique défini par une section circulaire et trois points.

La solution de ce problème revient à construire une sphère passant par trois points et tangente à un plan donné.

Théorème III. — *Le plan tangent en* P *à la surface* V *est le plan d'intersection de la sphère* Σ *et de la sphère* (CP).

Remarque. — Ce théorème enseigne à construire le plan tangent en un point quelconque de la surface.

Théorème IV. — *Les plans bissecteurs des plans des deux cercles* C, C′ *sont deux plans parallèles à deux plans principaux de la surface.*