Sur la capillarité

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 78-84

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__78_1>

SUR LA CAPILLARITÉ (*).

Influence de la courbure.

Soient AmB (*fig.* 1) une section normale faite en un point m de la ligne de séparation de deux liquides (L_1),

(*) Extrait du *Traité de Mécanique générale* de M. Resal, en cours de publication chez M. Gauthier-Villars, avec l'autorisation de l'auteur et de l'editeur.

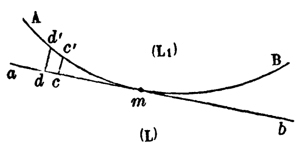
(L), superposés dans un tube capillaire, la concavité étant tournée vers (L_1);

ab la trace du plan tangent en *m*;

δ_1, δ les densités des deux liquides;

z la hauteur du point *m* au-dessus du niveau de la portion de (L) extérieure au tube.

Fig. 1.



Le point matériel *m* est en équilibre sous l'action de son poids *mg* et des actions qu'il reçoit des molécules (L) et (L_1).

On peut considérer la résultante des actions moléculaires de (L_1) sur *m*, comme étant due à celle Q_1 du même liquide dans l'hypothèse où *ab* serait la surface de séparation, et à la résultante Q'_1, prise en sens contraire, des actions provenant des molécules du ménisque.

Si nous désignons, pour (L), par Q et Q′ les équivalents de Q_1 et Q'_1, l'action exercée par ce liquide sur *m* sera de même la résultante de Q et Q′; de sorte que les forces Q, Q′, $-Q_1$, Q'_1, *mg* doivent se faire équilibre sur le point *m*.

D'après cet exposé, pour simplifier le langage, nous pourrons considérer le ménisque comme existant pour les deux fluides, en le considérant comme positif pour (L) et négatif pour (L_1). Laplace et Gauss ont supposé que les liquides dans les tubes capillaires n'éprouvent aucune variation dans leur densité. Poisson au contraire, par des considérations particulières, admet que la densité a subi une altération dont il croit devoir tenir compte dans le voisinage de la surface AmB. Lamé, dans ses leçons de Physique, en se basant sur la faible compressibilité des liquides, considère cette variation comme nulle ou négligeable.

Nous nous rangerons à cette dernière manière de voir, qui nous conduit à regarder (L) et (L_1) comme homogènes dans toute leur masse, et par suite les actions Q et Q_1 comme normales à AmB.

Il faut donc, pour l'équilibre, que la résultante de mg, $-Q'$, $-Q'_1$ soit aussi normale à la surface, ou que le travail élémentaire de ces trois forces pour un déplacement de m sur cette surface soit nul, ou encore que le potentiel de mg, des actions du ménisque de (L) sur m, et de celles du ménisque de (L_1) prises en sens contraire, soit constant pour tout point de la surface.

Le potentiel de l'action de la molécule m' du ménisque de (L) sur m est de la forme $mm'f(r)$, $f(r)$ étant une certaine fonction de la distance r de ces deux molécules.

Considérons un élément de volume de ce ménisque, limité par deux plans normaux en m faisant entre eux un angle $d\theta$, et par deux cylindres concentriques. Si l'on remarque que le rayon ι de la sphère d'activité est très-petit, on peut supposer, pour toute molécule de l'élément de volume considéré, $r = mc$, et par suite $cd = dr$; le potentiel dû à l'action de la masse déterminée par l'élément de volume est par suite

$$m\delta r d\theta f(r) cc'.dr,$$

et, pour toute la portion du ménisque limitée par les deux plans normaux,

$$m\delta\, d\theta \int_0^{\iota} rf(r)cc'.dr.$$

Mais, en appelant ρ le rayon de courbure de l'une des sections normales, on a $cc' = \frac{r^2}{2\rho}$, et l'expression ci-dessus devient

$$\delta \frac{d\theta}{2\rho} m \int_0^{\varepsilon} f(r) r^3 dr = \frac{m\,d\theta}{2\rho} \frac{k}{\pi},$$

en posant $\pi\delta \int_0^{\varepsilon} f(r) r^3\, dr = k$, qui est une constante.

Soient maintenant R, R′ les rayons de courbure principaux de la surface en m, l'angle θ étant censé mesuré à partir de la trace sur le plan tangent du plan normal correspondant au premier de ces rayons, on a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} \cos^2\theta + \frac{1}{R'} \sin^2\theta,$$

et le potentiel, pour tout le ménisque, est

$$\frac{mk}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{R} \cos^2\theta + \frac{1}{R'} \sin^2\theta\right) d\theta = \frac{mk}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Le potentiel du ménisque de (L) sera représenté de la même manière par

$$\frac{mk_1}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Si donc on appelle C une constante, nous aurons

$$mgz + \frac{mk}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) - \frac{mk_1}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = mC,$$

ou, en posant $k_1 - k = H$,

$$gz = \frac{H}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + C.$$

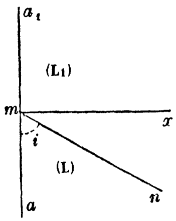
Dans le cas d'un seul liquide, (L_1) représentera l'atmosphère, et l'on devra avoir $C = 0$, puisque, pour un diamètre suffisamment grand du tube, on doit avoir $R = \infty$, $R' = \infty$ et $z = 0$, et l'on a la formule connue

$$gz = \frac{H}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Influence de la paroi du tube.

La *fig.* 2 représente la section normale en un point m

Fig. 2.



de l'intersection de la surface de contact de (L) et (L_1) avec celle de la paroi.

Soient mn, aa_1 les tangentes en m aux deux sections faites respectivement dans ces deux surfaces par le plan de la figure; i l'inclinaison de mn sur ma dans (L), mx la normale à la paroi, que nous supposerons formée d'une matière homogène. Si la paroi était un plan indéfini, son action mN sur la masse m serait dirigée suivant mx, et N serait une constante.

Quelle que soit la forme de la paroi, on peut également considérer N comme constante; car il est clair que les actions sur m exercées par les molécules du ménisque de la paroi ne peuvent donner, suivant mx, que des composantes de l'ordre de quantités que l'on peut négliger.

Nous ferons également abstraction, mais avec moins d'autorité, de l'influence du ménisque de (L) et (L_1), qui d'ailleurs est relativement faible dans la détermination de la composante suivant mx des actions qu'exercent les deux fluides sur m. Cette hypothèse doit être implicitement faite dans ses calculs par Poisson, lorsqu'il arrive à conclure que i est constant, ce qui est évident d'après les considérations qui précèdent.

Soit $mm'\varphi(r)$ l'action exercée par une molécule m' de (L) sur m, r étant la distance des deux molécules. Concevons dans ce liquide un cône ayant m pour sommet et d'une ouverture infiniment petite $d\omega$, et dont les génératrices fassent, aux infiniment petits près, l'angle α avec mn. La masse élémentaire $\delta r^2 d\omega\, dr$ de ce cône donnera, suivant mx, la composante

$$m\delta r^2 d\omega\, dr\, \varphi(r)\cos\alpha,$$

et l'on a pour tout le cône, en continuant à appeler ε le rayon de la sphère d'activité,

$$m\delta\, d\omega\cos\alpha \int_0^{\varepsilon} \varphi(r) r^2 dr = mq\, d\omega\cos\alpha,$$

q étant une constante dépendant de la nature de (L). Il vient, par suite, pour la composante normale totale due à l'action de ce liquide

$$mq \int \cos\alpha\, d\omega,$$

l'intégrale se rapportant au fuseau sphérique de centre m, d'un rayon égal à l'unité, limité par les plans mn et ma. Mais il est clair que cette intégrale représente la projection du fuseau sur un plan perpendiculaire à mx, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\cos i$. L'expression ci-dessus devient donc

$$mq\frac{\pi}{2}(1 - \cos i).$$

En appelant q_1 l'équivalent de q pour (L_1), ce liquide donne de même la composante normale

$$mq_1\frac{\pi}{2}(1 + \cos i).$$

6.

Si l'on néglige l'action de la pesanteur, ou si l'on suppose *ma* vertical, on a donc

$$m\mathrm{N} + mq\frac{\pi}{2}(1 - \cos i) + mq_1\frac{\pi}{2}(1 + \cos i) = 0,$$

d'où

$$\cos i = \frac{2\mathrm{N} + \pi(q + q_1)}{\pi(q - q_1)}.$$