NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ABEL TRANSON

Sur un nouveau mode de construction des coniques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 5-20

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__5_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

SUR UN NOUVEAU MODE DE CONSTRUCTION DES CONIQUES;

PAR M. ABEL TRANSON.

I.

Dans sa belle théorie des caractéristiques, M. Chasles a fait voir qu'un segment de droite (double) devait quelquefois être considéré comme une conique infiniment aplatie. En effet, dans un système de coniques dont les caractéristiques sont μ et ν, il existe un nombre fixe $(2\mu - \nu)$ de segments de droites qui participent en un certain sens aux propriétés des coniques du système (*).

Le nouveau mode de construction des coniques que je vais exposer, étant comparé à l'un des modes les plus usuels, mettra en relief l'existence d'une propriété commune aux véritables coniques et aux coniques infiniment aplaties.

Je ferai voir, en effet, que *si, en chaque point d'une conique à centre, et sur une direction constamment inclinée du même angle sur la normale, on porte une*

(*) *Voir* l'exposition élémentaire de la méthode des caractéristiques de M. Chasles, donnée par Prouhet dans les *Nouvelles Annales*; 1866, p. 193.

longueur proportionnelle à la moyenne géométrique des deux rayons focaux relatifs à ce point, l'extrémité de cette longueur décrira une nouvelle conique concentrique à la première et de même genre qu'elle.

On conçoit qu'une infinité de coniques distinctes pourront être ainsi dérivées d'une autre. Elles différeront entre elles soit par l'inclinaison constante de la moyenne géométrique des rayons focaux sur la normale, soit par le coefficient attribué à cette moyenne. — C'est ce mode de construction qui fait l'objet (*) du présent article. Or il y a cet autre mode, usuel et très-élémentaire : *Si, à partir de chaque point* C *d'une droite terminée aux points* A *et* B, *on porte dans une direction constante une longueur proportionnelle à la moyenne géométrique des deux segments* CA, CB, *l'extrémité de cette longueur a pour lieu une conique à centre.* Cette conique est une ellipse si les points C sont entre A et B; une hyperbole, s'ils sont en dehors. Dans le premier cas, le segment AB peut être considéré comme une ellipse aplatie; dans le second cas, les segments de la direction AB, qui sont extérieurs aux limites A et B, et qui s'é-

(*) Je dis l'*objet* et non pas l'*objectif;* c'est que, malgré la faveur universelle accordée à ce dernier mot depuis quelques années, je ne puis me résoudre à l'employer dans le nouveau sens qui lui est attribué. Je sais bien que pour des idées nouvelles, ou même pour d'anciennes idées que la marche du temps aura modifiées, c'est le privilége d'une langue vivante de créer des mots nouveaux, ou même de modifier le sens de quelques mots anciens; mais quand des mots consacrés par l'usage n'ont pas cessé de répondre exactement à l'idée qu'on veut exprimer, leur substituer un mot qui correspond à une idée d'un tout autre ordre, n'est-ce pas, pour une langue vivante, un signe de décadence plus que de vitalité? Et, par exemple, quand on a le choix entre des mots aussi expressifs que les suivants, *objet, but, visée,* etc., pourquoi leur substituer un vocable emprunté aux marchands de lunettes? Pour moi, lorsque dans un salon, ou au barreau, ou à la tribune, un discoureur parle de son OBJECTIF, je me sens toujours en curiosité de savoir où est son OCULAIRE.

tendent à l'infini de part et d'autre, peuvent être considérés comme les deux branches d'une hyperbole aplatie. Dans les deux cas, on peut dire que les points extrêmes A et B sont les foyers de la conique, et que AC, BC sont les rayons focaux du point C. Enfin les lignes issues des différents points de AB et sur lesquelles on porte des longueurs déterminées comme il a été expliqué, ces lignes ayant une direction fixe, font un angle constant avec une droite perpendiculaire à AB, c'est-à-dire avec la bissectrice des deux rayons focaux, *ou* encore avec la normale de la conique aplatie.

Dans ce mode usuel, une infinité de coniques distinctes dérivent d'une même conique aplatie qu'on peut considérer comme leur base commune, et l'on peut dire que les coniques du nouveau mode ont à leur tour une base commune qui est une conique non aplatie. Or les unes et les autres dérivent de leurs bases respectives suivant une loi qui est, comme on vient de le voir, exactement la même pour les deux modes. Il y a plus ; parmi les coniques issues d'une conique aplatie AB, considérons seulement celles qui sont relatives à une même inclinaison de la moyenne géométrique sur la base, et qui ne diffèrent entre elles que par le coefficient attribué à cette moyenne (*) ; si on construit la tangente de chacune d'elles dans les points où elles sont rencontrées par une même droite, issue d'un point C de la base selon l'inclinaison particulière au système, on sait que toutes ces tangentes rencontrent la base AB en un même point D, qui est le conjugué harmonique de C par rapport aux points A et B (foyers de la conique aplatie). — Eh bien,

(*) C'est-à-dire, considerons un système de coniques ayant un diamètre commun et les cordes conjuguées à ce diamètre selon une même direction.

cette propriété si connue se retrouve (*mutatis mutandis*) dans les coniques construites selon le nouveau mode; mais il faut d'abord démontrer la proposition principale.

II.

Dans les articles que j'ai publiés antérieurement sur le calcul directif (*Nouvelles Annales*, 1868), j'ai établi un cas très-particulier de cette proposition, celui où il s'agit de placer sur la normale d'une ellipse et de part et d'autre du point de la courbe une longueur précisément égale à la moyenne géométrique des deux rayons focaux. J'ai fait voir qu'on trouve alors deux cercles concentriques à l'ellipse donnée, et qui ont pour rayons respectivement la somme et la différence de ses deux axes.

Le calcul directif offrait pour ce cas particulier un moyen de démonstration infiniment facile. Son application au théorème général, quoique un peu moins simple, fera voir encore une fois qu'il peut rivaliser, non sans avantage, avec la méthode des coordonnées. Quoi qu'il en soit, ce sera un exercice intéressant pour ceux des lecteurs des *Nouvelles Annales* qui auront pris connaissance des règles de ce calcul, ou mieux encore qui auront été préalablement initiés à la *Théorie des équipollences* de M. Bellavitis, exposée dans ce Recueil par M. Hoüel (*Nouvelles Annales*, 1869) (*).

(*) En terminant la publication de mes articles sur *l'Algèbre directive*, j'ai été informé et je me suis empressé d'annoncer (*Nouv. Ann.*, 1868) que l'éminent professeur de l'Université de Padoue possédait depuis longtemps et avait publié en un vrai corps de doctrine, avec beaucoup d'autres beaux résultats, quelques-uns de ceux que je venais de trouver moi-même en développant les idées d'Argand, de Français, de Mourey et de M. Faure (de Gap), sur les *nombres inclinés;* sur ces nombres pendant si longtemps et maintenant encore si indûment appelés *nombres imaginaires*.

Supposons donc une ellipse dont les axes soient a et b, a étant l'axe focal dont la direction sera considérée comme l'origine des inclinaisons. Si x est une longueur comptée sur cet axe à partir du centre de la courbe, l'ordonnée cartésienne serait

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2};$$

le rayon central Y_0 sera représenté, en calcul directif, par une *somme algébrique :*

$$Y_0 = x + \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Le second terme de cette somme a manifestement une direction perpendiculaire à celle du premier, puisque $x^2 - a^2$ est nécessairement négatif. En même temps, les deux rayons focaux sont représentés (conformément aux règles du calcul directif) par $Y_0 + c$, $Y_0 - c$; leur moyenne géométrique, nécessairement dirigée selon la normale (*), est égale à $\sqrt{Y_0^2 - c^2}$; et si on la multiplie par un coefficient directif m, de grandeur et de direction déterminées, on aura une longueur proportionnelle à la moyenne en question et inclinée sur la normale d'un angle constant. Comme on aura pu porter cette longueur de part et d'autre du point de la courbe, les extrémités de ces deux longueurs égales seront fixées sur le plan par un rayon vecteur Y_m, dont l'expression ci-dessous, à cause du double signe qu'elle contient, convient également aux deux, savoir :

$$Y_m = Y_0 \pm m\sqrt{Y_0^2 - c^2};$$

(*) Je donnerai à la fin de cet article la détermination en grandeur et en direction de la moyenne géométrique de deux lignes diversement inclinées.

ou bien, en remplaçant Y_0 par sa valeur et c^2 par $a^2 - b^2$,

$$Y_m = x + \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$
$$\pm \frac{m}{a}\sqrt{(a^2 + b^2)x^2 - a^4 + 2abx\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Le second de ces deux radicaux est assimilable à la forme $\sqrt{\alpha + \beta\sqrt{-1}}$, qui se ramène, comme on sait, à la somme suivante :

$$\sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} + \sqrt{\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}};$$

or, dans l'application actuelle, on a

$$\alpha = (a^2 + b^2)x^2 - a^4; \quad \beta = 2abx\sqrt{a^2 - x^2},$$

et, par conséquent,

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = a^4 - (a^2 - b^2)x^2.$$

D'après cela, on trouve, après toute réduction,

$$Y_m = \frac{a \pm mb}{a}x + \frac{b \pm ma}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

A peine est-il besoin d'observer que, en supposant $m = 0$, on retrouve Y_0, c'est-à-dire le rayon vecteur de l'ellipse aux axes a et b, base commune de toutes les courbes à rayons vecteurs Y_m. D'ailleurs il est aisé de reconnaître ici les rayons vecteurs de deux ellipses distinctes. En effet, le premier terme représente une ligne que nous appellerons x', laquelle a la même origine que x, c'est-à-dire le centre de l'ellipse (a, b). Cette ligne x', ou $(a \pm mb)\frac{x}{a}$, est inclinée sur l'axe focal, ou bien, au contraire, est sans inclinaison, selon que le coefficient m est lui-même incliné ou non; et, dans tous les cas, la direction de x' est la même que celle de la ligne $a \pm mb$, puisque le quotient $\frac{x}{a}$, qui entre comme facteur dans la composition de x', est sans inclinaison. Or le rayon vecteur Y_m, étant exprimé en x', prend la forme

$$Y_m = x' + \frac{b \pm ma}{a \pm mb} \sqrt{x'^2 - (a \pm mb)^2}.$$

La quantité sous le radical est négative, puisque x'^2 est égal à $(a \pm mb)^2 \frac{x^2}{a^2}$, et qu'on a toujours $\frac{x^2}{a^2} < 1$. Ainsi le second terme de Y_m représente une ligne dont la direction est inclinée sur celle du premier terme x' d'un angle égal à l'inclinaison du facteur $\frac{b \pm ma}{a \pm mb}$ augmentée de 90 degrés. Appelons α cet angle total. L'extrémité de Y_m s'obtient donc en élevant, en chaque point de la base rectiligne $2(a \pm mb)$ et sous l'angle α, une longueur proportionnelle à la moyenne géométrique des deux segments $a \pm mb + x'$, $a \pm mb - x'$. A ces caractères, on reconnaît une ellipse.

Autrement : Y_m est la somme algébrique de deux termes qui ont sur le plan deux directions fixes. Prenons deux axes de coordonnées tracés selon ces deux directions, et convenons de représenter, comme M. Bellavitis, la grandeur absolue de toute longueur inclinée par la préfixe $\overline{gr}$; on aura, pour la double équation cartésienne, correspondant aux deux valeurs de Y_m, la forme suivante, qui est bien celle de deux ellipses :

$$\frac{y^2}{\overline{gr}^2 (b \pm ma)} + \frac{x^2}{\overline{gr}^2 (a \pm mb)} = 1.$$

En terminant ce paragraphe, il doit m'être permis de faire observer que j'aurais pu affecter une plus grande concision, si je n'étais pas fondé à croire que, probablement, quelques-uns des lecteurs des *Nouvelles Annales* sont peu familiarisés avec la pratique du calcul directif. On doit avoir égard à cette observation pour apprécier équitablement ce calcul.

III.

Pour établir le théorème commun aux coniques à base aplatie et à base non aplatie, j'observe d'abord que si l'équation d'une courbe quelconque en calcul directif est la suivante :

$$Y = \varphi(x),$$

où Y est le rayon vecteur de cette courbe, et x une variable indépendante qui peut être elle-même le rayon d'une courbe directrice de la proposée, ou plus simplement, ainsi que je l'ai supposé dans les paragraphes précédents, une longueur variable sans inclinaison, la direction de la tangente à la courbe proposée sera donnée par l'angle du quotient

$$\frac{dY}{dx} = \varphi'(x).$$

En même temps, l'équation d'une ligne droite issue du point qui correspond sur la courbe à une valeur de x sera donnée par son rayon vecteur

$$OL = Y + l\frac{dY}{dx},$$

expression dans laquelle l est une ligne de longueur variable, mais d'inclinaison constante. Si α est cette inclinaison, la droite dont il s'agit fera avec la tangente ce même angle α. Donc, si α est nul, c'est-à-dire si l est sans inclinaison, l'équation ci-dessus sera l'équation de la tangente elle-même.

A l'aide de ces principes, on démontrera d'abord comme il suit la propriété bien connue des tangentes aux coniques qui sont dérivées d'une base rectiligne.

L'équation de ces coniques résulte de la valeur ci-dessus de Y_m, dans laquelle on fera $b = 0$; il vient alors, pour le rayon vecteur,

$$(Y_m) = x \pm m\sqrt{x^2 - a^2},$$

d'où

$$\frac{d(Y_m)}{dx} = 1 \pm \frac{mx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Une droite issue d'un point quelconque de la courbe a donc pour équation

$$\mathrm{OL} = x + l \pm m\left(\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{lx}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right).$$

Or, en prenant pour l la valeur particulière

$$l = \frac{a^2}{x} - x,$$

qui annule le coefficient de m, on a un rayon vecteur particulier

$$\mathrm{OD} = \frac{a^2}{x}$$

commun à toutes les droites OL relatives aux différentes ellipses caractérisées par les diverses valeurs de m. Ces droites concourent donc en un même point D. D'ailleurs la valeur de l est sans inclinaison; ces droites sont donc les tangentes elles-mêmes. De plus, le rayon vecteur OD est lui-même sans inclinaison; donc le point D est sur le prolongement de la base AB. Enfin, en appelant C l'extrémité de x, de sorte que $x = \mathrm{OC}$, on a

$$\mathrm{OC}.\mathrm{OD} = a^2;$$

de sorte que les points C et D sont conjugués harmoniques par rapport aux extrémités de la base, c'est-à-dire *par rapport aux foyers de la conique aplatie.*

Considérons maintenant une ellipse dérivée d'une base non aplatie (dérivée d'une ellipse aux axes a et b).

Une droite issue d'un point quelconque de cette ellipse a pour équation, ainsi qu'on l'a expliqué,

$$\mathrm{OL} = \mathrm{Y}_m + l\,\frac{d\mathrm{Y}_m}{dx}.$$

On a d'ailleurs

$$\mathrm{Y}_m = \mathrm{Y}_0 \pm m\sqrt{\mathrm{Y}_0^2 - c^2} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathrm{Y}_m}{dx} = \frac{d\mathrm{Y}_0}{dx} \pm m\,\frac{\mathrm{Y}_0\,\dfrac{d\mathrm{Y}_0}{dx}}{\sqrt{\mathrm{Y}_0^2 - c^2}}.$$

Le rayon vecteur de cette droite reçoit donc la forme suivante :

$$\mathrm{OL} = \mathrm{Y}_0 + l\,\frac{d\mathrm{Y}_0}{dx} \pm \frac{m}{\sqrt{\mathrm{Y}_0^2 - c^2}}\left(\mathrm{Y}_0^2 - c^2 + l\mathrm{Y}_0\,\frac{d\mathrm{Y}_0}{dx}\right).$$

Or en prenant pour l la valeur qui annule le coefficient de m, savoir :

$$l = \frac{c^2 - \mathrm{Y}_0^2}{\mathrm{Y}_0\,\dfrac{d\mathrm{Y}_0}{dx}} \quad \text{ou bien} \quad l = (a^2 - x^2)\,\frac{\dfrac{d\mathrm{Y}_0}{dx}}{\mathrm{Y}_0},$$

on a un rayon vecteur particulier

$$\mathrm{OD} = \frac{c^2}{\mathrm{Y}_0},$$

lequel est commun à toutes les droites OL. Ces droites concourent donc au point D. D'ailleurs cette valeur de l n'est pas sans inclinaison : elle est inclinée d'un angle égal à celui du quotient directif $\frac{dY_0}{dx} : Y_0$. Donc ces droites ne sont pas tangentes à leurs courbes respectives, mais elles font avec les diverses tangentes ce même angle (*).

Enfin si, dans le numérateur de OD, on remplace c^2 par sa valeur, et dans le dénominateur Y_0 par OC, il viendra

$$OC.OD = a^2 - b^2 ;$$

par conséquent le point D est le conjugué harmonique du point C *par rapport aux deux foyers de la courbe de base.*

Pour apprécier cette remarquable analogie entre les coniques à base aplatie et à base non aplatie, il faut savoir que deux couples de points peuvent sur un plan, comme deux couples de points sur une même droite, former *une proportion harmonique*; ou, en d'autres termes, que quatre points sur un plan peuvent former un *quadrilatère harmonique.* Quoi qu'il en soit, je ferai voir (§ V) comment on peut construire le point D au moyen des deux foyers et du point C.

IV.

Voici maintenant le nouveau mode de construction pour les coniques dénuées de centre :

Si, en chaque point d'une parabole et sur une direction constamment inclinée du même angle sur la

---

(*) C'est un angle égal à celui que le rayon Y_0 prolongé fait avec la tangente à la courbe de base, mais à cet angle *pris négativement*; de sorte que, C étant le point extrême du rayon Y_0, la tangente à la base en C est bissectrice de CD et de Y_0 prolongé.

normale, on porte une longueur proportionnelle à la moyenne géométrique entre le rayon vecteur et une longueur constante, l'extrêmité de cette longueur aura pour lieu une autre parabole, dont l'axe aura la même direction que celui de la première.

Soit p le paramètre de la parabole donnée ; prenons son foyer pour centre des rayons vecteurs, et la direction de son axe pour origine des inclinaisons. Son rayon vecteur, identique avec son rayon focal, aura pour expression la somme algébrique

$$Y_0 = x + \sqrt{-p(2x+p)}.$$

Le rayon vecteur de l'une des courbes dérivées de cette base sera

$$Y_m = Y_0 + m\sqrt{-2Y_0 q},$$

où q est une ligne sans inclinaison, et m un nombre directif de grandeur et de direction déterminées.

Cette valeur de Y_m, exprimée en fonction de x, est la suivante :

$$Y_m = x + \sqrt{-p(2x+p)} + m\sqrt{-2q}\sqrt{x+\sqrt{-p(2x+p)}}.$$

En lui appliquant le même calcul qu'au rayon vecteur issu d'une ellipse de base (dans le précédent paragraphe), il viendra

$$Y_m = m\sqrt{pq} + x + \frac{\sqrt{p}+m\sqrt{q}}{\sqrt{p}}\sqrt{-p(2x+p)}.$$

Or, si l'on transporte l'origine au point dont le rayon vecteur est $m\sqrt{pq}$, le nouveau rayon vecteur du lieu sera exprimé par la somme des deux derniers termes de Y_m, et alors on reconnaîtra aisément que ce lieu est une parabole.

Il y aura une infinité de telles paraboles se distinguant entre elles par les valeurs de q et de m. Si l'on considère une ligne droite issue d'un point quelconque de l'une d'elles, le rayon vecteur de cette droite, mesuré à partir du foyer de la parabole de base, sera

$$OL = Y_m + l\frac{dY_m}{dx};$$

c'est-à-dire

$$OL = Y_0 + l\frac{dY_0}{dx} + m\sqrt{-2q}\left(\sqrt{Y_0} + l\frac{\frac{dY_0}{dx}}{2\sqrt{Y_0}}\right).$$

Or, en prenant pour l la valeur qui annule le coefficient de m, savoir

$$l = -\frac{2Y_0}{\frac{dY_0}{dx}},$$

on a un rayon vecteur particulier

$$OD = -Y_0,$$

lequel est commun à toutes les droites OL. Ces droites concourent donc au point D. Ce point est, comme on voit, sur le prolongement du rayon vecteur de la parabole de base, et à égale distance de l'autre côté du foyer. Cette propriété répond à celle des paraboles à base aplatie, pour lesquelles *la sous-tangente est le double de l'abscisse*; puisque alors l'abscisse n'est autre que le rayon focal de la base.

On peut aussi remarquer que les deux points C et D sont conjugués harmoniques par rapport aux deux foyers de la parabole non aplatie; parce que, dans un quadrilatère harmonique, si l'un des points passe à l'infini dans une direction quelconque, son conjugué se place au milieu de la diagonale qui réunit les deux autres sommets.

V.

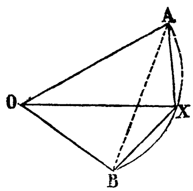
J'arrive à montrer comment on peut construire en grandeur et en direction la moyenne géométrique de deux lignes inclinées; c'est-à-dire comment on peut résoudre le problème de *construire la ligne* OX *déterminée par l'équation directive suivante où* OA *et* OB *sont données :*

$$OA.OB = \overline{OX}^2.$$

On déduit de là

$$\frac{OA}{OX} = \frac{OX}{OB},$$

d'où il résulte premièrement que OA est inclinée sur OX autant que OX l'est sur OB; c'est-à-dire que OX est sur la bissectrice de l'angle AOB.



De plus, l'égalité des rapports directifs $\frac{OA}{OX}$ et $\frac{OX}{OB}$ prouve que les deux triangles OAX, OXB sont semblables. Par conséquent, la somme des deux angles en X est égale à la somme des deux angles en A et B, et l'angle total $\widehat{AXB}$ est le supplément à 180 degrés de $\frac{1}{2}\widehat{AOB}$.

On construira donc sur AB un segment AXB capable de 180 degrés $- \frac{1}{2}\widehat{AOB}$, et le point X sera à la rencontre de ce segment avec la bissectrice de $\widehat{AOB}$.

Si les deux lignes OA, OB sont en prolongement l'une de l'autre, c'est-à-dire si l'angle en O vaut deux droits, on retrouve comme cas particulier la construction donnée dans les *Éléments de Géométrie*.

Le point D, qu'il nous restait à construire à la fin du paragraphe III, était déterminé par l'équation

$$OC.OD = \overline{OF}^2.$$

C'est comme si, dans la figure précédente, on donnait les lignes OA et OX, et qu'il fallût construire OB.

VI.

La propriété relative aux tangentes, qui est si connue dans un système de coniques dérivées d'une conique infiniment aplatie, et que nous avons retrouvée dans tout système de coniques dérivées (selon la même loi) d'une conique non aplatie, pourrait sembler d'abord une dépendance essentielle de la nature des coniques, et par suite une propriété exclusive de ces sortes de courbes ; mais il n'en est pas ainsi : la propriété en question résulte du mode de dérivation, et en ce sens elle est indépendante de la nature particulière de la base.

En effet, soit une courbe quelconque : « En chacun de ses points C et sur une droite inclinée d'un angle constant sur la bissectrice des deux rayons focaux de ce point, soit portée une longueur proportionnelle à la moyenne géométrique de ces deux rayons. » L'extrémité de cette longueur engendrera une infinité de courbes qui différeront entre elles, soit par l'angle constant, soit par le coefficient de proportionnalité, soit par ces deux éléments à la fois. Or les droites qui seront construites pour ces courbes de la manière que nous avons indiquée pour celles dont la base est une conique se rencontreront aussi en un même point D, lequel sera encore le conjugué harmonique du point C de la courbe donnée par rapport aux deux foyers.

C'est que la circonstance de ces rencontres est une propriété générale de la transformation directive du second ordre, c'est-à-dire de la transformation représentée en calcul directif par l'équation générale du second degré. J'ai démontré, en effet (*Nouvelles Annales*, 1868), qu'une telle équation se ramène à la forme simple

$$Y = X + m\sqrt{X^2 - c^2},$$

dans laquelle X est le rayon vecteur de la figure transformée, et Y celui de la figure transformante.

A cette occasion, j'ai fait remarquer que la transformation des figures par le moyen des équations directives semble ouvrir un vaste champ aux investigations géométriques, puisque, dans chaque ordre ou degré, les courbes transformantes ont d'abord des propriétés dépendantes des courbes transformées (courbes appelées *bases de dérivation* dans le présent article), et de plus ont aussi des propriétés communes qui dépendent essentiellement du mode de dérivation, comme on en a ci-dessus un exemple remarquable. Et enfin, de même qu'il y a des propriétés communes à toutes les courbes dites *algébriques* dans la méthode des coordonnées cartésiennes, il y a aussi en calcul directif des propriétés communes à toutes les transformations représentées par des équations algébriques.

P.-S. — Non-seulement à l'occasion des *caractéristiques*, mais aussi dans le *Traité des sections coniques*, M. Chasles fait voir qu'on peut considérer un segment de droite limitée comme une conique infiniment aplatie.