Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 572-580

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__572_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 944

(voir 2e série, t VIII, p. 276);

PAR M. MORET-BLANC.

Deux ellipses égales sont tangentes à la même droite au même point fixe, l'une par l'extrémité du grand axe, l'autre par l'extrémité du petit axe. Les deux demi-axes sont liés par la relation $ab =$ const. *On demande :*

1° *Le lieu des points d'intersection ;*

2° *Le lieu des milieux des tangentes communes.*

Prenons le point fixe pour origine des coordonnées rectangulaires et la tangente donnée pour axe des x, et posons $ab = k^2$.

Les équations des deux ellipses sont

$$(1)\qquad a^2y^2 + b^2x^2 - 2a^2by = 0,$$

$$(2)\qquad b^2y^2 + a^2x^2 - 2ab^2y = 0.$$

1° Pour avoir le lieu des points d'intersection, il faut éliminer a et b entre ces deux équations, et

$$(3)\qquad ab = k^2.$$

Ajoutant les deux premières, multipliées respectivement par $-b$ et $+a$, on a

$$(a^3 - b^3)x^2 - k^2(a-b)y^2 = 0.$$

Écartons le cas de $a = b$, que nous examinerons à part, et divisons par $(a-b)$; il vient

$$(4)\qquad [(a+b)^2 - k^2]x^2 - k^2y^2 = 0,$$

ou

$$(4')\qquad (a+b)^2x^2 = k^2(x^2+y^2).$$

Si l'on retranche l'équation (2) de l'équation (1), on a

$$(a^2 - b^2)(y^2 - x^2) - 2k^2(a-b)y = 0,$$

et, en divisant par $(a-b)$,

$$(5)\qquad (a+b)(y^2 - x^2) - 2k^2y = 0.$$

Éliminant enfin $(a+b)$ entre les équations (4′) et (5), on a

$$(6)\qquad 4k^2x^2y^2 = (y^2 - x^2)^2(x^2 + y^2)$$

pour l'équation du lieu des intersections, ou en coordonnées polaires

$$k^2 \sin^2 2\theta = r^2 \cos^2 2\theta,$$

(7) $$r = \pm k \operatorname{tang} 2\theta.$$

En vertu de l'équation (4), $\frac{y^2}{x^2} = \operatorname{tang}^2\theta$ a sa valeur minimum pour $a + b$ minimum, ce qui a lieu pour $a = b = k$; alors $\operatorname{tang}^2\theta = 3$, $\operatorname{tang}\theta = \sqrt{3}$; il en résulte qu'il faut faire varier θ seulement de 60 à 120 degrés; et, comme r ne doit avoir que des valeurs positives, il faut d'abord prendre

$$r = - \operatorname{tang} 2\theta.$$

Pour $\theta = 60^\circ$,

$$r = k\sqrt{3}, \quad x = \frac{k\sqrt{3}}{2}, \quad y = \frac{3k}{2};$$

θ croissant de 60 à 90 degrés, r décroît de $k\sqrt{3}$ à 0; puis, $\operatorname{tang} 2\theta$ devenant positive, on prendra la formule

$$r = k \operatorname{tang} 2\theta;$$

θ croissant de 90 à 120 degrés, r croîtra de 0 à $k\sqrt{3}$.

Pour des valeurs supplémentaires de θ, les valeurs de r sont égales; la courbe est symétrique par rapport à l'axe des y. Elle le sera aussi par rapport à l'axe des x, si l'on construit les ellipses des deux côtés de la droite fixe.

Si l'on fait $a = b$, les deux ellipses se confondent avec la circonférence

$$x^2 + y^2 - 2ky = 0.$$

2° Soit $y = mx + n$ l'équation d'une tangente commune.

En remplaçant y par $mx + n$ dans les équations (1) et (2), elles deviennent

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2m(n - b)x + a^2(n^2 - 2bn) = 0,$$
$$(b^2m^2 + a^2)x^2 + 2b^2m(n - a)x + b^2(n^2 - 2an) = 0.$$

Exprimant que chacune de ces équations a deux racines égales, on a, toutes réductions faites,

$$a^2 m^2 - n^2 + 2bn = 0,$$
$$b^2 m^2 - n^2 + 2an = 0,$$

d'où l'on tire successivement

$$(a^2 - b^2) m^2 = 2(a-b)n, \quad m^2(a+b) = 2n,$$
$$(a^2 - b^2) n^2 - 2(a^3 - b^3) n = 0,$$
$$(a+b) n^2 - 2(a^2 + ab + b^2) n = 0,$$
$$n = \frac{2(a^2+ab+b^2)}{a+b}, \quad m^2 = \frac{4(a^2+ab+b^2)}{(a+b)^2};$$

$n = 0$ donne l'axe des x tangent aux deux ellipses à l'origine.

Les coordonnées des points de contact sont, pour la première ellipse,

$$x' = \frac{a^2 m(b-n)}{a^2 m^2 + b^2}, \quad y' = \frac{a^2 m^2 b + b^2 n}{a^2 m^2 + b^2},$$

et, pour la seconde,

$$x'' = \frac{b^2 m(a-n)}{b^2 m^2 + a^2}, \quad y'' = \frac{ab^2 m^2 + a^2 n}{b^2 m^2 + a^2}.$$

Les coordonnées d'un point du lieu cherché sont

$$x = \frac{x' + x''}{2}, \quad y = \frac{y' + y''}{2},$$

ou

$$x = \frac{a^2 b^2 (a+b-2n) m^3 + ab(a^3+b^3) m - (a^4+b^4) mn}{2(a^2 m^2 + b^2)(b^2 m^2 + a^2)},$$

$$y = \frac{a^2 b^2 (a+b) m^4 + ab(a^3+b^3) m^2 + (a^4+b^4) m^2 n + 2a^2 b^2 n}{2(a^2 m^2 + b^2)(b^2 m^2 + a^2)}.$$

Si l'on pose

$$a + b = z, \quad ab = k^2,$$

d'où

$$n = \frac{2(z^2 - k^2)}{z}, \quad m^2 = \frac{4(z^2 - k^2)}{z^4},$$

les valeurs de x et y deviennent

$$x = \frac{2z^8 - 11k^2z^6 + 27k^4z^4 - 32k^6z^2 + 16k^8}{4z^8 - 20k^2z^6 + 41k^4z^4 - 40k^6z^2 + 16k^8}\sqrt{z^2 - k^2},$$

$$y = \frac{(4z^6 - 18k^2z^4 + 28k^4z^2 - 16k^6)(z^2 - k^2)z}{4z^8 - 20k^2z^6 + 41k^4z^4 - 40k^6z^2 + 16k^8},$$

z devant varier de $2k$ à $+\infty$.

L'élimination de z entre ces deux équations conduirait à celle de la courbe, lieu des milieux des tangentes communes; mais, comme cette équation serait fort compliquée, il est plus simple de regarder la courbe comme définie par les deux équations précédentes.

Pour $z = 2k$,

$$x = \frac{k\sqrt{3}}{2}, \quad y = \frac{3k}{2}.$$

On peut aussi exprimer x et y en fonction de m. On trouve

$$x = km\frac{(1 - m^2)(4 - m^2)^2m^2 + (3m^2 - 8)(4 - m^2) - (m^4 - 8)m^2}{[(m^4 + 1)(4 - m^2)^2 + 2(m^4 - 8)m^2]\sqrt{4 - m^2}},$$

$$y = k\frac{(4 - m^2)^2m^4 + (4 - m^2)(3m^2 - 8)m^2 + (m^4 - 8)m^4 + (4 - m^2)^2m^2}{[(m^4 + 1)(4 - m^2)^2 + 2(m^4 - 8)m^2]\sqrt{4 - m^2}},$$

m^2 devant varier depuis sa valeur minimum 3, correspondant à $a = b = k$, jusqu'à sa valeur maximum 4.

Pour $m^2 = 3$,

$$x = \pm\frac{k\sqrt{3}}{2}, \quad y = \frac{3k}{2}.$$

Pour $m^2 = 4$, x et y sont infinis; mais $\frac{y}{x} = \pm 2$.

Le coefficient angulaire des asymptotes est ± 2.

Note. — La même question a été résolue par M. Brocard.

Questions 970 *et* 1028

(voir 2e série, t. X, p. 240);

PAR M. MORET-BLANC.

Étant donnée une ellipse, on lui circonscrit un triangle dont les hauteurs passent par les points de contact des côtés opposés correspondants : trouver le lieu des sommets de ces triangles. (F. V.)

Soient

(1) $$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

l'équation de l'ellipse donnée, α et β les coordonnées d'un point du lieu. L'équation de la corde de contact des tangentes issues du point (α, β) sera

(2) $$a^2\beta y + b^2\alpha x = a^2b^2.$$

Éliminant successivement y et x entre ces deux équations, on a, pour déterminer les coordonnées des points de contact de ces tangentes, les équations

(3) $$(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)x^2 - 2a^2b^2\alpha x + a^4(b^2 - \beta^2) = 0,$$

(4) $$(a^2\beta^2 + b^3\alpha^2)y^2 - 2a^2b^2\beta y + b^2(a^2 - \alpha^2) = 0,$$

d'où

$$x = \frac{a^2b^2\alpha \pm a^2\beta\sqrt{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2}}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2} = \begin{cases} x_1, \\ x_2, \end{cases}$$

$$y = \frac{a^2b^2\beta \mp b^2\alpha\sqrt{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2}}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2} = \begin{cases} y_1, \\ y_2. \end{cases}$$

Les tangentes aux points (x_1, y_1), (x_2, y_2) et les normales aux mêmes points ont respectivement pour équations

(5) $$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2,$$

(6) $$b^2x_2x + a^2y_2y = a^2b^2,$$

(7) $$a^2y_1x - b^2x_1y = c^2x_1y_1,$$

(8) $$a^2y_2x - b^2x_2y = c^2x_2y_2.$$

Appelant x', y' les coordonnées du point d'intersection des lignes (6) et (7), et x'', y'' celles du point d'intersection des lignes (5) et (8), ces équations donnent

$$x' = x_1 \frac{a^2 b^4 + a^2 c^2 y_1 y_2}{a^4 y_1 y_2 + b^4 x_1 x_2} = x_1 \frac{(a^2 + c^2)\beta^2 + b^2\alpha^2 - b^2 c^2}{b^2(a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2)},$$

$$y' = y_1 \frac{a^4 b^2 - b^2 c^2 x_1 x_2}{a^4 y_1 y_2 + b^4 x_1 x_2} = y_1 \frac{a^2\beta^2 + (b^2 - c^2)\alpha^2 + a^2 c^2}{a^2(a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2)},$$

$$x'' = x_2 \frac{a^2 b^4 + a^2 c^2 y_1 y_2}{a^4 y_1 y_2 + b^4 x_1 x_2} = x_2 \frac{(a^2 + c^2)\beta^2 + b^2\alpha^2 - b^2 c^2}{b^2(a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2)},$$

$$y'' = y_2 \frac{a^4 b^2 - b^2 c^2 x_1 x_2}{a^4 y_1 y_2 + b^4 x_1 x_2} = y_2 \frac{a^2\beta^2 + (b^2 - c^2)\alpha^2 + a^2 c^2}{a^2(a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2)}.$$

Posons, pour abréger,

$$\frac{(a^2 + c^2)\beta^2 + b^2\alpha^2 - b^2 c^2}{b^2(a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2)} = \mathrm{M}, \quad \frac{a^2\beta^2 + (b^2 - c^2)\alpha^2 + a^2 c^2}{a^2(a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2)} = \mathrm{N},$$

on aura

$$x' = \mathrm{M} x_1, \quad y' = \mathrm{N} y_1.$$
$$x'' = \mathrm{M} x_2, \quad y'' = \mathrm{N} y_2.$$

Il faut exprimer que les points (x', y'), (x'', y'') sont sur une même tangente à l'ellipse.

Appelons x_3, y_3 les coordonnées du point de contact, on aura les deux conditions

$$a^2 y' y_3 + b^2 x' x_3 = a^2 b^2,$$
$$a^2 y'' y_3 + b^2 x'' x_3 = a^2 b^2,$$

d'où l'on tire

$$y_3 = \frac{b^2(x' - x'')}{x'y'' - x''y'}, \quad x_3 = \frac{a^2(y'' - y')}{x'y'' - x''y'}.$$

Ces coordonnées doivent vérifier l'équation de l'ellipse, ce qui donne

$$b^2(x' - x'')^2 + a^2(y'' - y')^2 = (x'y'' - x''y')^2,$$

ou

$$(9) \quad b^2\mathrm{M}^2(x_1 - x_2)^2 + a^2\mathrm{N}^2(y_2 - y_1)^2 = \mathrm{M}^2\mathrm{N}^2(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2.$$

Or on a, en posant, pour abréger,

$$\sqrt{a^2\beta^2+b^2\alpha^2-a^2b^2}=\mathrm{R},\quad a^2\beta^2+b^2\alpha^2=\mathrm{D},$$

$$x_1-x_2=\frac{2a^2\beta\mathrm{R}}{\mathrm{D}},\quad y_2-y_1=\frac{2b^2\alpha\mathrm{R}}{\mathrm{D}},$$

$$x_1y_2-x_2y_1=\frac{2a^2b^2\mathrm{R}}{\mathrm{D}}.$$

L'équation (9) devient, en supprimant le facteur $\frac{4a^2b^2\mathrm{R}^2}{\mathrm{D}^2}$, qui n'est jamais nul,

$$a^2\mathrm{M}^2\beta^2+b^2\mathrm{N}^2\alpha^2=a^2b^2\mathrm{M}^2\mathrm{N}^2,$$

ou

$$\frac{\alpha^2}{b^2\mathrm{M}^2}+\frac{\beta^2}{a^2\mathrm{N}^2}=1,$$

et enfin, en remettant pour M et N leurs valeurs,

$$\frac{(\alpha^2+\beta^2-a^2-b^2)^2b^2\alpha^2}{[(a^2+c^2)\beta^2+b^2\alpha^2-b^2c^2]^2}+\frac{(\alpha^2+\beta^2-a^2-b^2)^2a^2\beta^2}{[a^2\beta^2+(b^2-c^2)\alpha^2+a^2c^2]^2}=1.$$

On vérifie sans peine que la normale à l'ellipse, au point (x_3, y_3), passe par le point (α, β).

Note. — La même question a éte resolue par M. Gambey.

Seconde solution de la question 1034;

PAR M. L. PAINVIN.

La question 1034 résolue dans un des derniers numéros des *Nouvelles Annales*, même tome, p. 364, peut encore se résoudre de la manière suivante.

Le théorème à démontrer est ainsi énoncé :

On prend sur une surface du second ordre une section plane quelconque; cette courbe peut être prise pour la focale d'une surface nouvelle circonscrite à une quelconque des surfaces du second ordre homofocales à la première.

Soit l'équation tangentielle de la surface donnée

$$(1)\qquad a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-1=0;$$

l'équation d'une section plane sera

$$(2)\quad f_0(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-1)-(a^2u_0u+b^2v_0v+c^2w_0w-1)^2=0,$$

où u_0, v_0, w_0 sont les coordonnées fixes du plan sécant, et

$$(2\ bis)\qquad f_0=a^2u_0^2+b^2v_0^2+c^2w_0^2-1.$$

Or, si l'on considère la surface

$$(3)\qquad f_0(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-1)+k(u^2+v^2+w^2) \\ -(a^2u_0u+b^2v_0v+c^2w_0w-1)^2=0,$$

k étant une constante arbitraire, cette surface est évidemment circonscrite à une des homofocales de la surface (1), et elle admet pour focale la courbe plane (2). En effet, pour déterminer les focales d'une surface $F(u, v, w)=0$, il suffit de déterminer λ de manière que l'équation

$$F(u, v, w)+\lambda(u^2+v^2+w^2)=0$$

représente une courbe plane; or, si l'on applique cette règle à la surface (3), en faisant $\lambda=-k$, on obtient la courbe plane (2); donc, etc.