NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LOUIS SALTEL

Application de la généralisation du principe de correspondance à la théorie de l'élimination

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 565-570

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__565_1>

APPLICATION DE LA GÉNÉRALISATION DU PRINCIPE DE CORRESPONDANCE A LA THÉORIE DE L'ÉLIMINATION;

PAR M. LOUIS SALTEL.

Principe fondamental. — Lorsqu'on a sur une droite k séries de points $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_k$ tels que, prenant arbitrairement : 1° un point A_1 de la première série, 2° un point A_2 de la seconde série, 3° un point A_3 de la troisième série,..., au point A_{k-1} de la $(k-1)^{ième}$ série, correspondent α_k points de la $k^{ième}$ série, et, de même, à $k-1$ points de $(k-1)$ quelconques de ces séries correspondent α_i points pour la série restante S_i, il existe $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_k$ points qui, considérés comme appartenant à $(k-1)$ quelconques des k séries, coïncident chacun avec un point correspondant pris dans la série restante.

Nota. — Si l'on ne considère que deux séries de points, on retrouve le principe de correspondance de M. Chasles.

De ce principe fondamental résultent immédiatement les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Le degré de l'équation du lieu géométrique obtenu en éliminant le paramètre r entre les équations*

$$(1) \qquad f_a^\alpha(x, y, r) = 0, \quad f_a^\alpha(x, y, z, r) = 0,$$
$$(2) \qquad f_b^\beta(x, y, r) = 0, \quad f_b^\beta(x, y, z, r) = 0,$$

de degré a, b par rapport aux variables (x, y), (x, y, z), et dont les coefficients sont des fonctions de degré α, β par rapport au paramètre **r**, *est, en général, d'un ordre marqué par*

$$a\beta + b\alpha.$$

Théorème II. — *Le degré de l'équation du lieu géométrique obtenu en éliminant les paramètres r, s entre les équations*

$$(1) \qquad f_a^\alpha(x, y, r, s) = 0, \quad f_a^\alpha(x, y, z, r, s) = 0,$$
$$(2) \qquad f_b^\beta(x, y, r, s) = 0, \quad f_b^\beta(x, y, z, r, s) = 0,$$
$$(3) \qquad f_c^\gamma(x, y, r, s) = 0, \quad f_c^\gamma(x, y, z, r, s) = 0,$$

de degré a, b, c par rapport aux variables x, y, z, et dont les coefficients sont des fonctions de degré α, β, γ par rapport aux paramètres r, s, est, en général, d'un ordre marqué par

$$a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta.$$

Théorème III. — *Le degré de l'équation du lieu géométrique obtenu en éliminant les paramètres r, s, t entre les équations*

$$(1) \qquad f_a^\alpha(x, y, r, s, t) = 0, \quad f_a^\alpha(x, y, z, r, s, t) = 0,$$
$$(2) \qquad f_b^\beta(x, y, r, s, t) = 0, \quad f_b^\beta(x, y, z, r, s, t) = 0,$$
$$(3) \qquad f_c^\gamma(x, y, r, s, t) = 0, \quad f_c^\gamma(x, y, z, r, s, t) = 0,$$
$$(4) \qquad f_d^\delta(x, y, r, s, t) = 0, \quad f_d^\delta(x, y, z, r, s, t) = 0,$$

de degré a, b, c, d par rapport aux variables x, y, z, *et dont les coefficients sont des fonctions de degré α, β, γ, δ par rapport aux paramètres r, s, t, est, en général, d'un ordre marqué par*

$$a\beta\gamma\delta + b\alpha\gamma\delta + c\alpha\beta\delta + d\alpha\beta\gamma.$$

Nota. — La loi générale est évidente.

Théorème IV. — *Le degré de l'équation du lieu géométrique obtenu en éliminant les paramètres r, s entre les équations*

$$\begin{array}{lll}
(1) & f_a^\alpha(x, y, r, s) = 0, & f_a^\alpha(x, y, z, r, s) = 0,\\
(2) & f_b^\beta(x, y, r, s) = 0, & f_b^\beta(x, y, z, r, s) = 0,\\
(3) & f^\gamma(r, s) = 0, & f^\gamma(r, s) = 0,
\end{array}$$

de degré a, b par rapport aux variables x, y, z, et dont les coefficients sont des fonctions de degré α, β, γ par rapport aux paramètres r, s, est, en général, d'un ordre marqué par

$$\gamma(a\beta + b\alpha).$$

Théorème V. — *Le degré de l'équation du lieu géométrique obtenu en éliminant les paramètres r, s, t entre les équations*

$$\begin{array}{lll}
(1) & f_a^\alpha(x, y, r, s, t) = 0, & f_a^\alpha(x, y, z, r, s, t) = 0,\\
(2) & f_b^\beta(x, y, r, s, t) = 0, & f_b^\beta(x, y, z, r, s, t) = 0,\\
(3) & f^\gamma(r, s, t) = 0, & f^\gamma(r, s, t) = 0,\\
(4) & f^\delta(r, s, t) = 0, & f^\delta(r, s, t) = 0,
\end{array}$$

de degré a, b par rapport aux variables x, y, z, et dont les coefficients sont des fonctions de degré α, β, γ, δ par rapport aux paramètres r, s, t, est, en général, d'un ordre marqué par

$$\gamma\delta(a\beta + b\alpha).$$

Théorème VI. — *Le degré de l'équation du lieu géo-*

métrique obtenu en éliminant les paramètres r, s, t, u entre les équations

$$
\begin{array}{lll}
(1) & f_a^\alpha(x, y, r, s, t, u) = 0, & f_a^\alpha(x, y, z, r, s, t, u) = 0,\\
(2) & f_b^\beta(x, y, r, s, t, u) = 0, & f_b^\beta(x, y, z, r, s, t, u) = 0,\\
(3) & f^\gamma(r, s, t, u) = 0, & f^\gamma(r, s, t, u) = 0,\\
(4) & f^\delta(r, s, t, u) = 0, & f^\delta(r, s, t, u) = 0,\\
(5) & f^\lambda(r, s, t, u) = 0, & f^\lambda(r, s, t, u) = 0,
\end{array}
$$

de degré a, b par rapport aux variables x, y, z, et dont les coefficients sont des fonctions de degré α, β, γ, δ, λ *par rapport aux paramètres r, s, t, u, est, en général, d'un ordre marqué par*

$$\gamma\delta\lambda(a\beta + b\alpha).$$

Nota. — La loi générale est évidente.

Théorème VII. — *Le degré de l'équation du lieu géométrique obtenu en éliminant les paramètres r, s, t entre les équations*

$$
\begin{array}{lll}
(1) & f_a^\alpha(x, y, r, s, t) = 0, & f_a^\alpha(x, y, z, r, s, t) = 0,\\
(2) & f_b^\beta(x, y, r, s, t) = 0, & f_b^\beta(x, y, z, r, s, t) = 0,\\
(3) & f_c^\gamma(x, y, r, s, t) = 0, & f_c^\gamma(x, y, z, r, s, t) = 0,\\
(4) & f^\delta(r, s, t) = 0, & f^\delta(r, s, t) = 0,
\end{array}
$$

de degré a, b, c par rapport aux variables x, y, z, et dont les coefficients sont des fonctions de degré α, β, γ, δ *par rapport aux paramètres r, s, t, est, en général, d'un ordre marqué par*

$$\delta(a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta).$$

Théorème VIII. — *Le degré de l'équation du lieu géométrique obtenu en éliminant les paramètres r, s, t, u* *entre les équations*

$$
\begin{array}{lll}
(1) & f_a^{\alpha}(x, y, r, s, t, u) = 0, & f_a^{\alpha}(x, y, z, r, s, t, u) = 0, \\
(2) & f_b^{\beta}(x, y, r, s, t, u) = 0, & f_b^{\beta}(x, y, z, r, s, t, u) = 0, \\
(3) & f_c^{\gamma}(x, y, r, s, t, u) = 0, & f_c^{\gamma}(x, y, z, r, s, t, u) = 0, \\
(4) & f^{\delta}(r, s, t, u) = 0, & f^{\delta}(r, s, t, u) = 0, \\
(5) & f^{\lambda}(r, s, t, u) = 0, & f^{\lambda}(r, s, t, u) = 0,
\end{array}
$$

de degré a, b, c par rapport aux variables x, y, z, et dont les coefficients sont des fonctions de degré α, β, γ, δ, λ par rapport aux paramètres r, s, t, u, est, en général, d'un ordre marqué par

$$\delta\lambda(a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta).$$

THÉORÈME IX. — *Le degré de l'équation du lieu géométrique obtenu en éliminant les paramètres r, s, t, u, v entre les équations*

$$
\begin{array}{lll}
(1) & f_a^{\alpha}(x, y, r, s, t, u, v) = 0, & f_a^{\alpha}(x, y, z, r, s, t, u, v) = 0, \\
(2) & f_b^{\beta}(x, y, r, s, t, u, v) = 0, & f_b^{\beta}(x, y, z, r, s, t, u, v) = 0, \\
(3) & f_c^{\gamma}(x, y, r, s, t, u, v) = 0, & f_c^{\gamma}(x, y, z, r, s, t, u, v) = 0, \\
(4) & f^{\delta}(r, s, t, u, v) = 0, & f^{\delta}(r, s, t, u, v) = 0, \\
(5) & f^{\lambda}(r, s, t, u, v) = 0, & f^{\lambda}(r, s, t, u, v) = 0, \\
(6) & f^{\mu}(r, s, t, u, v) = 0, & f^{\mu}(r, s, t, u, v) = 0,
\end{array}
$$

de degré a, b, c par rapport aux variables x, y, z, et dont les coefficients sont des fonctions de degré α, β, γ, δ, λ, μ par rapport aux paramètres r, s, t, u, v, est, en général, d'un ordre marqué par

$$\delta\lambda\mu(a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta).$$

Nota. — La loi générale est évidente.

THÉORÈME X. — *Le* principe fondamental *permet de trouver immédiatement le degré de l'équation du lieu* *géométrique obtenu en éliminant n paramètres entre $n+1$ équations de degrés donnés par rapport aux variables x, y, z (quelques-unes d'entre elles pouvant d'ailleurs être de degré zéro par rapport à ces variables x, y, z), et dont les coefficients sont des fonctions de degrés également donnés par rapport aux n paramètres.*