LAGUERRE

Recherches analytiques sur la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 55-71

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__55_1>

RECHERCHES ANALYTIQUES

sur la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner

(suite, voir 2e série, t. XI, p. 418);

PAR M. LAGUERRE.

V. — *Digression sur les covariants doubles des formes binaires.*

29. Comme, dans tout ce qui suit, les covariants doubles des formes u et ω se présentent très-fréquemment, les considérations suivantes, quoique très-simples, ne paraîtront peut-être pas inutiles.

Soient les formes $u(x,y)$ et $\omega(x,y)$, dans lesquelles j'ai, pour un instant, substitué aux variables t et τ de nouvelles variables x et y.

On a évidemment, en conservant les notations précédentes,

$$u(tx+t'y,\tau x+\tau'y)=ux^4+4\mathcal{E}'x^3y+6\mathcal{E}_0x^2y^2+4\mathcal{E}xy^3+u'y^4,$$

et de même

$$\omega(tx+t'y,\tau x+\tau'y)=\omega x^4+4\mathfrak{F}'x^3y+6\mathfrak{F}_0x^2y^2+4\mathfrak{F}xy^3+\omega'y^4,$$

en posant

$$\mathfrak{F}'=t'(\alpha t^3+3\beta t^2\tau+3\gamma t\tau^2+\delta\tau^3)+\tau'(\beta t^3+3\gamma t^2\tau+3\delta t\tau^2+\varepsilon\tau^3),$$

....

Soit maintenant F un covariant double quelconque de u et de ω; on a, par suite de la définition même des covariants,

$$\begin{aligned}&\mathrm{F}(a,\, b,\ldots,\, \alpha,\, \beta,\ldots,\, tx+t'y,\, \tau x+\tau'y,\, tx'+t'y',\, \tau x'+\tau'y')\\ &\quad=(t\tau'-t'\tau)^{-m}\mathrm{F}(u,\, \mathcal{E}',\ldots,\, \omega,\, \mathfrak{F}',\ldots,\, x,\, y,\, x',\, y');\end{aligned}$$

d'où, en faisant dans cette identité $x=1$, $y=0$, $x'=0$, $y'=1$,

$$\begin{aligned}&\mathrm{F}(a,\, b,\ldots,\, \alpha,\, \beta,\ldots,\, t,\, \tau,\, t',\, \tau')\\ &\quad=(t\tau'-t'\tau)^{-m}\mathrm{F}(u,\, \mathcal{E}',\ldots,\, \omega,\, \mathfrak{F}',\ldots,\, 1,0,\, 0,\, 1).\end{aligned}$$

D'où les conclusions suivantes :

1° Un covariant double (et il en est de même évidemment d'un covariant simple et d'un invariant) est déterminé quand on connaît son terme principal, c'est-à-dire le terme auquel se réduit le covariant quand on y fait $t=1$, $\tau=0$, $t'=0$, $\tau'=1$.

On obtient, à une certaine puissance près de $(t\tau'-t'\tau)$.

la valeur du covariant en remplaçant respectivement dans le terme principal a, b, c,... par u, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}_0$,..., et α, β, γ,... par ω, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}_0$,....

2° Si l'on veut établir une relation entre des éléments géométriques dépendant de deux points de la sextique Z, on pourra toujours supposer que les paramètres de ces deux points sont o et ∞ ; de la relation qui a lieu dans ce cas particulier, on déduira la relation générale en remplaçant respectivement a, b, c,... et α, β, γ,... par les émanants que j'ai mentionnés ci-dessus.

30. Pour faire une application simple des considérations qui précèdent, je remarquerai que l'on a

$$i = ae - 4bd + 3c^2 = (t\tau' - t'\tau)^{-4}[uu' - 4\mathcal{E}\mathcal{E}' + 4\mathcal{E}_0^2].$$

L'équation de la quadrique $\mathcal{S}$ peut donc s'écrire de la façon suivante :

$$uu' - 4\mathcal{E}\mathcal{E}' + 4\mathcal{E}_0^2 = 0.$$

Les plans osculateurs de la sextique Z aux points (t) et (t'), dont les équations sont

$$u = 0 \quad \text{et} \quad u' = 0,$$

coupent $\mathcal{S}$ suivant deux coniques situées sur le cône dont l'équation est

$$4\mathcal{E}_0^2 - 4\mathcal{E}\mathcal{E}' = 0;$$

le sommet de ce cône est défini par les équations

$$\mathcal{E}_0 = 0, \quad \mathcal{E} = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}' = 0.$$

Ce point est d'ailleurs le point (t, t') de la surface $\mathfrak{X}$.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème VII. — *Étant donnée une sextique* Z, *si l'on mène deux plans osculateurs quelconques de cette* *courbe, ils coupent la quadrique, qui contient Z, suivant deux coniques; le sommet d'un des cônes qui passe par ces deux coniques se trouve sur la surface $\mathcal{H}$, dont Z est une asymptotique, et quand ces plans se déplacent de toutes les manières possibles, le sommet de ce cône décrit la surface $\mathcal{H}$.*

Remarque. — On peut par ces deux coniques mener un deuxième cône; le sommet de ce cône décrit une surface que j'étudierai dans la suite de ce Mémoire.

VI. — *Centre et plan central d'une sextique gauche.*

31. Outre l'invariant

$$a\varepsilon - 4b\delta + 6c\gamma - 4d\beta + e\alpha,$$

qui est identiquement nul, les deux polynômes u et ω ont un autre invariant, du premier degré relativement aux coefficients de u,

$$\begin{aligned} h_0 = {} & a(\gamma\varepsilon - \delta^2) + 2b(\gamma\delta - \beta\varepsilon) + c(\alpha\varepsilon + 2\beta\delta - 3\gamma^2) \\ & + 2d(\beta\gamma - \alpha\delta) + e(\alpha\gamma - \beta^2). \end{aligned}$$

L'équation $h_0 = 0$ représente un plan Π; pour trouver les points d'intersection de ce plan avec la sextique Z, il faut remplacer $a, b, c, \ldots$ par leurs valeurs tirées du tableau B; le résultat devant être un covariant de ω, il suffit de calculer son terme du degré le plus élevé et par conséquent de faire a, b, c égaux à zéro, et

$$d = \alpha t^6 \quad \text{et} \quad e = 4\beta t^6;$$

il vient ainsi, comme premier terme de ce covariant,

$$2[3\alpha\beta\gamma - \alpha^2\delta - 2\beta^3]t^6;$$

d'où l'on conclut que les paramètres des points où le plan Π rencontre la sextique Z sont les racines de l'équation que l'on obtient en égalant à zéro le covariant du sixième degré de ω (*).

Les paramètres des quatre points stationnaires de Z étant les racines de l'équation $\omega = 0$, on déduit de là et des propriétés bien connues du covariant du sixième degré d'une forme biquadratique la proposition suivante :

THÉORÈME VIII. — *Les quatre points stationnaires d'une sextique Z peuvent être partagés de trois façons différentes en deux groupes de deux points ; à chaque mode de groupement correspond sur la courbe une division en involution donnant lieu à deux points doubles. Les droites qui joignent les trois couples de points doubles sont situées dans un même plan* Π, *qui est le plan central de la sextique.*

Comme je le montrerai plus tard, ces trois droites sont situées sur la surface $\mathfrak{X}$, dont Z est une asymptotique.

32. Il est facile de conclure de ce qui précède qu'il ne peut y exister d'autres covariants de u et de ω, du premier degré par rapport aux coefficients de u, que ceux que je viens d'examiner.

En égalant, en effet, à zéro un tel covariant, on a l'équation d'un plan qui rencontre Z en six points dont les paramètres sont les racines d'une équation que l'on obtient en égalant à zéro un covariant de ω du sixième degré. Or il n'existe qu'un seul covariant de ce degré ; la

(*) Les points cuspidaux d'une sextique sont souvent désignés sous le nom de *points stationnaires*.

Par tout point (t) d'une sextique Z, on peut mener en effet un plan P osculateur de cette courbe et différent du plan (t) ; le paramètre t' de ce plan s'obtient en égalant à zéro l'émanant

$$\mathfrak{F}' = t'(\alpha t^3 + 3\beta t^2 + 3\gamma t + \delta) + (\beta t^3 + 3\gamma t^2 + 3\delta t + \varepsilon) = 0.$$

Si le paramètre (t) satisfait à la relation $\omega = 0$, on voit que l'on a $t' = t$ et le plan P se confond avec le plan (t).

proposition que je viens d'énoncer est donc démontrée.

De là diverses conséquences importantes.

En premier lieu, h_0 étant le seul invariant linéaire par rapport aux coefficients de u (sauf $a\varepsilon - 4b\delta + \ldots$, qui est identiquement nul), si l'on passe de la sextique Z à la sextique Z_ρ, en employant les substitutions dont j'ai parlé au § I, h_0 devra, à un facteur numérique près, conserver la même valeur; et, en effet, on vérifie facilement que l'on a, en conservant les notations de ce même paragraphe,

$$h'_0 = (\theta\lambda - \mu\rho)^2 h_0.$$

D'où la proposition suivante :

Théorème IX. — *Toutes les sextiques qui sont les asymptotiques d'une surface* $\mathcal{H}$ *ont même plan central.*

Je dirai que ce plan est aussi le *plan central* de $\mathcal{H}$; comme je l'ai déjà fait observer, il coupe cette surface suivant trois droites.

33. *Équation de la surface du quatrième ordre qui contient les lignes nodales correspondant aux asymptotiques de la surface* $\mathcal{H}$.

Pour tous les points de la courbe $\mathcal{N}$, qui est la ligne nodale de la surface développable ayant Z pour arête de rebroussement, on a

$$\frac{ac-b^2}{a} = \frac{ad-bc}{2b} = \frac{ae+2bd-3c^2}{6c} = \frac{be-cd}{2d} = \frac{ce-d^2}{e} = \frac{3j}{2i}.$$

On déduit de là

$$\frac{-k}{4h_0} = \frac{3j}{2i},$$

d'où

$$6jh_0 + ik = 0,$$

et encore

$$(12) \qquad 6jh_0 + ik - h^2 = 0.$$

Cette équation représente une surface du quatrième ordre Ω qui contient la nodale $\mathfrak{N}$; en se reportant aux formules (3) du tableau A, on voit que l'on a

$$i'k' - h'^2 = (\theta\lambda - \mu\rho)^2(ik - h^2);$$

en vertu de la formule donnée dans le numéro précédent, on a donc identiquement

$$6jh'_0 + i'k' - h'^2 = (\theta\lambda - \mu\rho)^2[6jh_0 + ik - h^2];$$

d'où l'on déduit facilement que la surface Ω contient les nodales $\mathfrak{N}_\rho$, dont le lieu est ainsi donné par l'équation (12).

34. Il y existe un point O de l'espace dont les coordonnées s'expriment au moyen des coefficients de u et du hessien de u.

Les coordonnées de ce point sont déterminées par le système suivant d'équations

$$\frac{a}{3j_0\alpha - 2i_0(\alpha\gamma - \beta^2)} = \frac{b}{3j_0\beta - 2i_0\dfrac{\alpha\delta - \beta\gamma}{2}} = \frac{c}{3j_0\gamma - 2i_0\dfrac{\alpha\varepsilon + 2\beta\delta - 3\gamma^2}{6}},$$

. . . .

On vérifie facilement que les quantités $a, b, c, \ldots$ sont les coordonnées d'un point, car elles satisfont identiquement à la relation

$$(1) \qquad a\varepsilon - 4b\delta + 6c\gamma - 4d\beta + e\alpha = 0.$$

Cela posé, si l'on détermine le plan polaire du point O par rapport à une quadrique quelconque du réseau (i, h, k), c'est-à-dire à une quadrique dont l'équation soit de la forme

$$Ai + Bh + Ck = 0,$$

il est clair que l'équation de ce plan s'obtiendra en égalant à zéro un invariant de u et de ω, du premier degré par rapport aux coefficients de u.

D'après ce que j'ai dit plus haut, son équation est nécessairement

$$h_0 = 0.$$

D'où la proposition suivante :

THÉORÈME X. — *Le plan central* Π *de la surface* $\mathfrak{X}$ *a même pôle relativement à toutes les quadriques du réseau* (i, h, k).

Je dirai que ce pôle est *le centre de la surface* $\mathfrak{X}$ *et des diverses sextiques qui sont les asymptotiques de cette surface.*

VII. — *Sur les droites qui sont situées sur la surface* $\mathfrak{X}$.

35. Si une droite peut être placée sur la surface $\mathfrak{X}$, elle rencontre $\mathcal{S}$ en deux points situés sur l'asymptotique Z. Cette droite est donc une corde de la sextique Z. Pour trouver la relation qui existe entre les paramètres des extrémités de cette corde, je supposerai qu'ils soient respectivement o et ∞, en faisant

$$t = 1, \quad \tau = 0, \quad t' = 0 \quad \text{et} \quad \tau' = 1.$$

D'après le tableau B, les coordonnées de ces points seront donc

$$a = b = c = 0, \quad d = \alpha, \quad e = 4\beta,$$

et

$$a = -4\delta, \quad b = -\varepsilon, \quad c = d = e = 0.$$

Désignons par $\varkappa$ un paramètre variable; les coordonnées d'un point quelconque de la corde seront données par les équations

$$a = -4\delta, \quad b = -\varepsilon, \quad c = 0, \quad d = \varkappa\alpha, \quad e = 4\varkappa\beta.$$

On a

$$\begin{vmatrix} -4\delta & -\varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & 0 & \varkappa\alpha \\ 0 & \varkappa\alpha & -4\varkappa\beta \end{vmatrix} = 4\varkappa(\varepsilon^2\beta - \varkappa\alpha^2\delta);$$

d'où l'on voit que la valeur du paramètre $\varkappa$ correspondant au troisième point de rencontre de la corde avec $\mathfrak{X}$ est donnée par l'équation

$$\varepsilon^2\beta - \varkappa\alpha^2\delta = 0;$$

si la corde est située tout entière sur la surface, cette équation doit être satisfaite pour une infinité de valeurs de $\varkappa$. On doit donc avoir

$$\varepsilon^2\beta = 0 \quad \text{et} \quad \alpha^2\delta = 0;$$

d'où l'on déduit, d'après les propositions données n° 29, les relations suivantes, qui existent entre les paramètres des extrémités d'une corde de Z située sur la surface,

$$\omega'^2\mathcal{F}' = 0 \quad \text{et} \quad \omega^2\mathcal{F} = 0,$$

ou bien

$$\begin{aligned}&(\alpha t'^4 + 4\beta t'^3 + 6\gamma t'^2 + 4\delta t' + \varepsilon)^2 \\ &\quad \times [t'(\alpha t^3 + 3\beta t^2 + 3\gamma t + \delta) + (\beta t^3 + 3\gamma t^2 + 3\delta t + \varepsilon)] = 0,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&(\alpha t^4 + 4\beta t^3 + 6\gamma t^2 + 4\delta t + \varepsilon)^2 \\ &\quad \times [t(\alpha t'^3 + 3\beta t'^2 + 3\gamma t' + \delta) + (\beta t'^3 + 3\gamma t'^2 + 3\delta t' + \varepsilon)] = 0.\end{aligned}$$

36. On peut satisfaire à ces relations de deux façons distinctes :

1° En faisant

$$\omega = 0 \quad \text{et} \quad \omega' = 0.$$

Les racines de ces équations sont les paramètres des quatre points stationnaires de Z (qui sont les quatre points coniques de $\mathfrak{X}$) ; on en conclut que les six arêtes du tétraèdre dont ces points sont les sommets sont situées sur la surface.

2° En faisant

$$\mathfrak{F} = 0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{F}' = 0.$$

Pour résoudre ce système d'équations, je remarque que, en éliminant t' entre ces deux équations, le résultat est un covariant dont le premier terme est

$$\alpha(\alpha^2\delta + 2\beta^3 - 3\alpha\beta\gamma)t'^2.$$

Ce covariant est donc $\omega\Gamma_0$, Γ_0 désignant le covariant du sixième degré de ω.

Laissant de côté le facteur étranger ω, on voit que les paramètres des extrémités des cordes cherchées seront les racines de l'équation

$$\Gamma_0 = 0.$$

Soient z_1, z_2 et z_3 les racines de l'équation (*)

$$z^3 - i_0 z + 2j_0 = 0;$$

on sait que Γ_0 est le produit des trois facteurs

$$\sqrt{z_1\omega - 2\eta}, \quad \sqrt{z_2\omega - 2\eta}, \quad \sqrt{z_3\omega - 2\eta},$$

où η représente le hessien de ω.

Les deux racines de l'équation

$$\sqrt{z_1\omega - 2\eta} = 0$$

sont les paramètres des extrémités d'une corde située sur la surface. Je désignerai cette corde par la lettre D_1. Aux deux autres facteurs correspondront deux autres cordes D_2 et D_3; il suit d'ailleurs de ce que j'ai dit au n° 31 que ces

(*) *Voir* Salmon, *Algèbre supérieure*, p. 180 et suiv.

trois droites sont l'intersection de la surface $\mathcal{H}$ par le plan central Π (*).

A cette occasion, je ferai remarquer que le théorème donné au n° 31 peut s'énoncer d'une façon un peu plus générale de la manière suivante :

Si l'on coupe une asymptotique quelconque de $\mathcal{H}$ par une quadrique du réseau (i, h, k), cette quadrique rencontre la courbe en quatre points distincts des points coniques. Si l'on partage d'une façon quelconque ces points d'intersection en deux systèmes de deux points, la droite qui joint les deux points doubles de l'involution déterminée par ces deux systèmes est une des droites de la surface $\mathcal{H}$ située dans le plan central.

VIII. — *Pôles et plans polaires relativement à la surface $\mathcal{S}$. Applications diverses.*

37. Considérons un point dont les coordonnées soient a', b', c', d', e'.

L'équation du plan polaire de ce point, relativement à la quadrique $\mathcal{S}$, est évidemment

$$a'\frac{di}{da} + b'\frac{di}{db} + c'\frac{di}{dc} + d'\frac{di}{dd} + e'\frac{di}{de} = 0,$$

ou bien

$$ae' - 4bd' + 6cc' - 4db' + ea' = 0.$$

Si la quadrique $\mathcal{S}$ est telle que l'on ait $i_0 = 0$, les coordonnées du centre de la surface $\mathcal{H}$ (n° 34) sont $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$.

L'équation du plan polaire de ce point est donc

$$a\varepsilon - 4b\delta + 6c\gamma - 4d\beta + e\alpha = 0,$$

(*) Il est clair que tout ce qui précède suppose que la forme ω ne présente aucune particularité. J'examinerai plus tard les cas particuliers où ω aurait un facteur triple ou deux facteurs carrés.

et, cette relation étant identiquement satisfaite, on en conclut que le plan polaire est indéterminé; par suite:

Lorsque, pour une asymptotique Z, *on a* $i_0 = 0$, *cette asymptotique est située sur un cône du second degré dont le sommet est le centre de la courbe.*

38. Soit un plan

$$a\varepsilon_0 - 4b\delta_0 + 6c\gamma_0 - 4d\beta_0 + e\alpha_0 = 0;$$

on voit immédiatement que les coordonnées du pôle de ce plan sont données par le système d'équations

$$\frac{a}{2i_0\alpha_0 - \aleph\alpha} = \frac{b}{2i_0\beta_0 - \aleph\beta} = \frac{c}{2i_0\gamma_0 - \aleph\gamma} = \frac{d}{2i_0\delta_0 - \aleph\delta} = \frac{e}{2i_0\varepsilon_0 - \aleph\varepsilon},$$

où j'ai posé, pour abréger,

$$\aleph = \alpha\varepsilon_0 - 4\beta\delta_0 - 6\gamma\gamma_0 - 4\delta\beta_0 + e\alpha_0.$$

Il est facile, en effet, de vérifier :

1° Que les quantités déterminées par les équations précédentes sont effectivement les coordonnées d'un point, car elles satisfont à l'identité

$$a\varepsilon - 4b\delta + 6c\gamma - 4d\beta + e\alpha = 0;$$

2° Que le plan polaire de ce point, par rapport à $\mathcal{S}$, est le plan donné.

39. Comme application des formules précédentes, considérons un plan tangent quelconque à la surface $\mathfrak{X}$. Comme nous l'avons vu (n° 18), son équation est

$$\mathcal{E}_0 = a t^2 t'^2 + 2b(tt'^2 + t^2 t') + c(t^2 + 4tt' + t'^2) + 2d(t + t') + e = 0;$$

on a, dans ce cas,

$$\aleph = \mathcal{F}_0,$$

et les coordonnées du pôle de ce plan sont données par le système d'équations

$$(13)\qquad \frac{a}{2i_0 - \mathcal{F}_0\alpha} = \frac{b}{-i_0(t+t') - \mathcal{F}_0\beta} = \ldots = \frac{e}{2i_0 t^2 t'^2 - \mathcal{F}_0\varepsilon}.$$

Supposons le point tellement choisi sur la surface $\mathcal{K}$ que l'on ait

$$\mathcal{F}_0 = 0,$$

les coordonnées du pôle seront données par les équations

$$\frac{a}{1} = \frac{2b}{-(t+t')} = \ldots = \frac{e}{t^2 t'^2};$$

en se reportant au n° 25, on voit que le point ainsi déterminé est le point de la nodale $\mathcal{N}$, qui est l'intersection des tangentes (t) et (t'); le plan polaire de ce point touche par conséquent la surface $\mathcal{K}$ au point (t, t').

D'où encore cette conséquence :

La surface développable, qui est la polaire réciproque de la nodale $\mathcal{N}$ relativement à la quadrique $\mathcal{S}$, est circonscrite à $\mathcal{K}$.

40. D'après ce que je viens de dire, on voit que la surface de Steiner $\mathfrak{S}$, qui est la polaire réciproque de $\mathcal{K}$ relativement à la quadrique $\mathcal{S}$, contient la nodale $\mathcal{N}$.

Cherchons l'équation de cette surface; il faut, pour l'obtenir, éliminer t et t' entre les équations (13). A cet effet, $\varkappa$ désignant une quantité inconnue, je suppose que la valeur commune des rapports contenus dans ces équations soit égale à $\frac{\varkappa}{\mathcal{F}_0}$. On mettra facilement ces équations sous la forme suivante :

$$\frac{2i_0\varkappa}{\mathcal{F}_0} = \frac{a+\varkappa\alpha}{1} = \frac{b+\varkappa\beta}{\frac{-(t+t')}{2}} = \frac{c+\varkappa\gamma}{\frac{t^2+4tt'+t'^2}{6}} = \ldots = \frac{e+\varkappa\varepsilon}{t^2 t'^2}.$$

Je remarque maintenant que ces équations expriment que la forme $u + x\omega$ est un carré parfait; or, pour que cela soit possible, on doit avoir entre les invariants de u et de ω la relation suivante (*) :

$$(A - 48B)^2 - R = 0.$$

Dans cette formule, A et B représentent deux combinants qui, dans le cas actuel où

$$a\varepsilon - 4b\delta + 6c\gamma - 4d\beta + e\alpha = 0,$$

s'expriment, au moyen des invariants que nous avons introduits, par les formules suivantes :

$$A = 4i_0 i \quad \text{et} \quad B = -\frac{k}{4} - \frac{1}{6} i_0 i;$$

R représente le résultant des équations u et ω. Par suite, la relation précédente (qui est évidemment l'équation de la surface $\mathfrak{C}$) devient

$$144(k + i_0 i)^2 - R = 0.$$

Il est clair que l'équation $R = 0$ représente les plans osculateurs de la sextique Z en ses quatre points stationnaires; ces plans touchent la surface $\mathfrak{C}$ le long de quatre coniques situées sur la quadrique

$$k + i_0 i = 0.$$

Cette quadrique est la polaire réciproque relativement à $\mathfrak{S}$ d'une quadrique Υ à laquelle sont circonscrits les quatre cônes nodaux de la surface (**).

(*) Salmon, *Higher Algebra*, §§ 213 et 214.

(**) Pour un point conique de la surface $\mathcal{H}$, l'équation $\omega = 0$ étant satisfaite, de la formule donnee (n° 10), il résulte que l'equation du cône, circonscrit à $\mathcal{H}$ et ayant ce point pour sommet, est

$$J_0^2 = 0.$$

Le cône circonscrit est donc un cône du second degré double; c'est un des cônes nodaux de la surface.

La forme de l'équation précédente montre qu'elle représente une quadrique passant par l'intersection des deux quadriques $i = o$ et $k = o$.

Je dirai, pour abréger, que la quadrique $k = o$ est adjointe à la quadrique $\mathcal{S}$ $(i = o)$, et je la désignerai par la notation $\mathcal{S}'$. Cela posé, la remarque précédente donne lieu, relativement à la surface Υ, à la proposition suivante :

THÉORÈME XI. — *Si l'on considère une quadrique quelconque $\mathcal{S}_\rho$, passant par une asymptotique de $\mathcal{X}$, et la quadrique adjointe $\mathcal{S}'_\rho$, la développable, circonscrite à $\mathcal{S}_\rho$ le long de leur intersection, est circonscrite à la quadrique Υ.*

Réciproquement, si l'on circonscrit à Υ et à $\mathcal{S}_\rho$ une surface développable, la courbe suivant laquelle cette développable touche $\mathcal{S}_\rho$ est située sur $\mathcal{S}'_\rho$.

IX. — *Sur les fonctions qui jouent le rôle d'invariants relativement aux substitutions qui permettent de passer d'une asymptotique de $\mathcal{X}$ aux autres asymptotiques de la surface.*

41. Étant donnée une asymptotique quelconque Z de la surface $\mathcal{X}$, on peut, en général (sauf un cas particulier que j'examinerai tout à l'heure), en déduire toutes les autres asymptotiques au moyen des substitutions dont j'ai parlé au § I.

Il est important de remarquer que les *quatre cônes nodaux appartiennent à toutes les asymptotiques.*

Sur ces cônes, et en général sur la théorie de la surface qui fait l'objet de ce Mémoire, *voir :*

STURM : *Uber die Römische Fläche von Steiner* (*Math. Ann.*, III);

ECKARDT : *Beiträge zur analytischen Geometrie* (*Math. Ann.*, V);

TOWNSEND : *On the Nodal Cones of Quadrinodal Cubics* (*Quarterly Journal*, X).

Ces substitutions peuvent être définies par le système linéaire

$$\begin{matrix} \rho & \theta \\ \lambda & \mu, \end{matrix}$$

et il y existe un certain nombre de fonctions des coefficients a, b, c,... qui, quand on y effectue ces substitutions, ne changent pas de valeur, ou, pour parler plus exactement, sont simplement multipliées par une puissance de $(\rho\mu - \lambda\theta)$.

Ces fonctions, lorsqu'on les égale à zéro, représentent des surfaces indépendantes de l'asymptotique particulière qui sert de base au système de coordonnées et ne dépendant que de la surface $\mathfrak{X}$ elle-même.

Telles sont, par exemple, les fonctions $ik - h^2$ et h_0, qui donnent lieu aux relations

$$i'k' - h'^2 = (\rho\mu - \lambda\theta)^2 (ik - k^2)$$

et

$$h_0 = (\rho\mu - \lambda\theta)^2 (ik - h^2).$$

L'équation $ik - h^2 = 0$ représente, comme nous l'avons vu, l'enveloppe des quadriques S_ρ, et l'équation $h_0 = 0$ est celle du plan central.

Les fonctions qui jouissent de cette propriété jouent évidemment un rôle important dans la théorie de la surface $\mathfrak{X}$; outre celles dont je viens de parler, il est facile d'en trouver plusieurs autres.

Il résulte, en effet, des formules données au n° 7 du § I, que, par la substitution

$$\begin{matrix} \rho & \theta \\ \lambda & \mu, \end{matrix}$$

les formes

$$ix^2 + 2hxy + ky^2 \quad \text{et} \quad x^3 - i_0 xy^2 + 2j_0 y^3$$

se changent respectivement en

$$i'x^2 + 2h'xy + k'y^2 \quad \text{et} \quad x^3 - i'_0 xy^2 + 2j'_0 y^3.$$

De là résulte que les invariants de ce système de formes sont des fonctions jouissant de la propriété dont je viens de parler.

Nous aurons à considérer (*) :

1° L'invariant quadratique

$$i_0^2 i + 18 j_0 h + 3 i_0 k;$$

je désignerai par Θ la quadrique dont l'équation s'obtient en égalant à zéro cet invariant;

2° Le résultant de ces formes; j'étudierai de préférence les facteurs de ce résultant.

En désignant, comme au n° 36, par z_1, z_2 et z_3 les trois racines de l'équation

$$z^3 - i_0 z + 2 j_0 = 0,$$

je m'occuperai des surfaces représentées par les équations

$$\begin{aligned} z_1^2 i + 2 z_1 h + k &= 0, \\ z_2^2 i + 2 z_2 h + k &= 0, \\ z_3^2 i + 2 z_3 h + k &= 0. \end{aligned}$$

(*La suite prochainement.*)