Nouvelles annales de mathématiques

G. Bellavitis

Exposition de la méthode des équipollences

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 529-561

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__529_0>

EXPOSITION DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES

(suite, voir même tome, p. 501);

PAR M. G. BELLAVITIS.

(Traduit de l'italien par M. LAISANT, capitaine du Génie.)

---

110. PROBLÈME. — *Déterminer le barycentre* F *du périmètre d'un triangle.*

Le barycentre du côté AB est en son point milieu C^0; par suite, la somme géométrique de toutes les droites joignant un point quelconque F à tous les éléments infiniment petits de ce côté, éléments dont le nombre est proportionnel à la longueur c, sera

$$c\,FC^0 \bumpeq \frac{c}{2}(FA + FB).$$

On peut en dire autant pour les deux autres côtés $BC = a$, $CA = b$; et, pour que F soit le barycentre de l'ensemble de ces trois côtés, on devra avoir (99)

$$(9)\qquad (b+c)FA + (c+a)FB + (a+b)FC \bumpeq 0.$$

Pour rendre tout à fait directe et facile la manière d'employer cette équipollence, il convient (au moyen de la règle I) de rapporter tous les points à un point arbitraire O; alors l'équipollence (9) devient

$$2(a+b+c)OF \bumpeq (b+c)OA + (c+a)OB + (a+b)OC.$$

La formule (5) du n° 108, en raison de la proportionnalité des côtés a, b, c aux sinus des angles opposés, devient

$$(a+b+c)OP \bumpeq a\,OA + b\,OB + c\,OC.$$

Par suite,

$$2OF + OP \bumpeq OA + OB + OC \bumpeq 3OG,$$

G étant le barycentre des trois points A, B, C. Changeant O en F, on a

$$(10) \qquad FP \bumpeq 3FG,$$

relation qui, combinée avec la formule (3) du n° 104, $RH \bumpeq 3RG$, donne aussi

$$(11) \qquad HP \bumpeq 2FR.$$

Par suite, *dans tout triangle, le barycentre* G *est au tiers de la droite qui va du barycentre* F *du périmètre au centre* P *du cercle inscrit, et la droite menée entre l'intersection* H *des trois hauteurs et le centre du cercle inscrit est équipollente au double de celle menée entre le barycentre du périmètre et le centre* R *du cercle circonscrit.*

111. On pourrait aussi démontrer que F est le point milieu de la droite joignant H au centre du cercle qui passe par les centres P_1, P_2, P_3 des cercles exinscrits au triangle ABC. Les relations (3), (4), (10), entre les points R, H, G, O, P, F, permettent de les déterminer lorsqu'on en connaît trois seulement, indépendants entre eux.

112. Des relations analogues existent par rapport aux barycentres F_1, F_2, F_3 des trois côtés du triangle, lorsqu'on affecte les éléments infiniment petits de l'un des côtés d'un coefficient négatif. Comme au n° 106, on trouve que la figure $FF_1F_2F_3$ est semblable à la figure $PP_1P_2P_3$; les côtés de la première sont les moitiés de ceux de la seconde.

Exercices sur les aires polygonales.

113. Problème. — *Exprimer le produit des aires de deux polygones au moyen des distances entre les sommets de l'un et ceux de l'autre.*

Dans le cas de deux triangles ABC, LMN, la règle XII (57) nous donne le produit cherché au moyen d'une équipollence que l'on pourrait bien construire, mais qu'il ne serait pas facile de calculer, parce que les termes représentent des droites non parallèles; fort heureusement, elle peut se résoudre en quatre de ces binômes que nous avons vus (96) être réductibles à des termes, tous d'inclinaison nulle. L'équipollence se convertit de la sorte en l'équation désirée. Voici le calcul :

$$\begin{aligned}
16\,\mathrm{ABC.LMN} \bumpeq\; & -(\mathrm{AB\,cj.AC} - \mathrm{cj.AB.AC}) \\
& \quad \times (\mathrm{LM\,cj.LN} - \mathrm{cj.LM.LN}) \\
\bumpeq\; & \mathrm{AB\,cj.AC\,cj.LM.LN} + \mathrm{cj.AB.AC.LM\,cj.LN} \\
& - \mathrm{AB\,cj.AC.LM\,cj.LN} - \mathrm{cj.AB.AC\,cj.LM.LN} \\
\bumpeq\; & (\mathrm{AB\,cj.LM} + \mathrm{cj.AB.LM}) \\
& \quad \times (\mathrm{AC\,cj.LN} + \mathrm{cj.AC.LN}) \\
& - (\mathrm{AB\,cj.LN} + \mathrm{cj.AB.LN}) \\
& \quad \times (\mathrm{AC\,cj.LM} + \mathrm{cj.AC.LM}) \\
\bumpeq\; & (\mathrm{gr}^2\mathrm{AM} + \mathrm{gr}^2\mathrm{BL} - \mathrm{gr}^2\mathrm{AL} - \mathrm{gr}^2\mathrm{BM}) \\
& \quad \times (\mathrm{gr}^2\mathrm{AN} + \mathrm{gr}^2\mathrm{CL} - \mathrm{gr}^2\mathrm{AL} - \mathrm{gr}^2\mathrm{CN}) \\
& - (\mathrm{gr}^2\mathrm{AN} + \mathrm{gr}^2\mathrm{BL} - \mathrm{gr}^2\mathrm{AL} - \mathrm{gr}^2\mathrm{BN}) \\
& \quad \times (\mathrm{gr}^2\mathrm{AM} + \mathrm{gr}^2\mathrm{CL} - \mathrm{gr}^2\mathrm{AL} - \mathrm{gr}^2\mathrm{CM}).
\end{aligned}$$

Dans le développement du dernier membre, les termes dépendant des côtés AB, LM se réduisent aux deux seuls

$$\mathrm{gr}^2\mathrm{AL}\,\mathrm{gr}^2\mathrm{BM} - \mathrm{gr}^2\mathrm{AM}\,\mathrm{gr}^2\mathrm{BL},$$

et un binôme analogue s'obtient pour chaque combinaison d'un côté du triangle ABC avec un côté du triangle LMN, étant bien entendu que les côtés, dans les deux triangles, doivent être pris dans le même sens.

Le produit des aires des deux triangles est ainsi donné par un polynôme de dix-huit termes, qui peut s'exprimer symboliquement comme il suit :

$$(1)\quad 16\,ABC.LMN = (AB + BC + CA)\,(LM + MN + NL),$$

pourvu que, dans le développement du second membre, on substitue à chaque produit AB.LM le binôme

$$(AL.BM)^2 - (AM.BL)^2.$$

114. Si au triangle ABC est adossé un autre triangle ACD, de sorte qu'ils forment ensemble le quadrilatère ABCD, on aura la valeur de 16ABCD.LMN, en ajoutant au premier facteur du second membre de (1) les termes AC + CD + DA. Or les binômes qui résultent du terme AC, et qui sont, par exemple, $(AL.CM)^2 - (AM.CL)^2$, détruisent évidemment ceux résultant de CA, et qui sont $(CL.AM)^2 - (CM.AL)^2, \ldots$; donc, en admettant la convention précédente (**113**), nous aurons

$$16\,ABCD.LMN = (AB + BC + CD + DA)(LM + MN + NL).$$

Par le même raisonnement, nous pourrions étendre la formule au produit de deux polygones, et le problème serait ainsi résolu; il resterait à combiner chaque côté de l'un des polygones avec chaque côté de l'autre, et à calculer, pour chaque combinaison, l'un des binômes ci-dessus.

115. Ce théorème, de même que son analogue relatif au produit de deux polyèdres, a été publié par moi, avec divers autres, dans les *Annales des Sciences du royaume lombard-vénitien*, t. IV, p. 256, 1834, et t. VIII, p. 96,

§ 108, 1838. Il a été reproduit depuis lors dans le *Journal für die Mathematik*, Bd. XXIV, § 252, 1842, et aussi dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*. On l'a attribué à Staudt.

116. Si R est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, la formule symbolique (1) se réduit à

$$16\,\text{ABC.RMN} = (\text{AB} + \text{BC} + \text{CA})(\text{MN}),$$

parce que les termes exprimés symboliquement par $(\text{AB} + \text{BC} + \text{CA})(\text{RM} + \text{NR})$ sont tous multipliés par une des quantités égales $(\text{AR})^2 = (\text{BR})^2 = (\text{CR})^2$, et se détruisent réciproquement.

Si R_1 est le centre du cercle circonscrit au triangle ACD, la somme

$$16\,\text{ABC.RMN} + 16\,\text{ACD.R}_1\text{MN}$$

sera exprimée (114) par

$$(\text{AB} + \text{BC} + \text{CD} + \text{DA})(\text{MN}),$$

expression qui dépend des côtés et non des diagonales du polygone ABCD; par conséquent, si ce polygone avait été divisé d'une autre manière en triangles, cela n'aurait pas changé la valeur de la somme des produits de chaque triangle par le triangle ayant pour sommet le centre du cercle circonscrit à ce triangle, et pour base une droite MN choisie arbitrairement.

Il résulte de là et d'une propriété connue des barycentres, pouvant facilement se déduire de la définition qu'on en a donnée (99), que :

Pour tout polygone ou assemblage de polygones (situés dans un même plan), il existe un point qui est le barycentre de masses proportionnelles aux aires des triangles distincts en lesquels le polygone peut être *divisé, ces masses étant situées aux centres des cercles circonscrits à ces triangles, au lieu de l'être aux barycentres de ceux-ci.*

A ce point remarquable, qui n'a été, à ma connaissance, observé par personne, j'ai donné le nom de *pseudo-centre*.

117. Supposons, par exemple, qu'un triangle ABC soit divisé en trois triangles GBC, GCA, GAB, dont les aires soient α, β, γ, d'où résulte que l'on a (100)

$$\alpha GA + \beta GB + \gamma GC \bumpeq o;$$

le pseudo-centre du triangle ABC, c'est-à-dire le centre R de son cercle circonscrit, sera aussi le pseudo-centre de l'ensemble des trois triangles, c'est-à-dire sera le barycentre des centres R_1, R_2, R_3 des cercles circonscrits à GBC, GCA, GAB, affectés des coefficients numériques, ou masses, α, β, γ; cela revient à dire qu'on aura

$$\alpha RR_1 + \beta RR_2 + \gamma RR_3 \bumpeq o.$$

En particulier, si G est le barycentre du triangle ABC, R sera celui du triangle $R_1 R_2 R_3$.

118. Nous pourrons appeler *multilatéral* un système de droites MN, PQ,... dont la somme géométrique est nulle, et qui, par conséquent, sont équipollentes aux côtés d'un polygone fermé. La somme des triangles OMN, OPQ,..., qui ont un sommet commun O et pour bases les côtés d'un multilatéral, sera exprimée, d'après la règle XII, par

$$\frac{\sqrt{\ }}{4}(OM\,cj.MN + OP\,cj.PQ + \ldots - cj.OM.MN - cj.OP.PQ - \ldots).$$

Pareillement, pour un autre point O_1, nous aurons

$$\frac{\sqrt{\ }}{4}(O_1M\,cj.MN + O_1P\,cj.PQ + \ldots - cj.O_1M.MN - cj.O_1P.PQ - \ldots).$$

La différence de ces deux expressions est

$$\frac{\sqrt{}}{4}[OO_1(\mathrm{cj}.MN + \mathrm{cj}.PQ + \ldots) - \mathrm{cj}.OO_1(MN + PQ + \ldots)],$$

valeur qui est nulle, puisque

$$MN + PQ + \ldots \bumpeq 0.$$

Donc :

THÉORÈME. — *La somme des aires des triangles qui ont pour bases les côtés d'un multilatéral* MN, PQ,... *et un sommet commun est constante, quel que soit ce sommet; elle est dite* aire du multilatéral.

Le plus simple multilatéral est celui formé de deux droites parallèles égales et directement opposées, c'est-à-dire telles que

$$MN + PQ \bumpeq 0.$$

Son aire est la moitié de celle du parallélogramme MNPQ.

119. THÉORÈME. — *Le produit des aires d'un polygone* ABCD *et d'un multilatéral* MN, PQ,... *est exprimé symboliquement, selon la convention du n°* 113, *par*

$$\tfrac{1}{16}(AB + BC + CD + DA)(MN + PQ + \ldots).$$

On le démontre en prenant pour aire du multilatéral la somme des triangles RMN, RPQ,... ayant pour sommet commun le pseudo-centre R du polygone ABCD.

120. Étant données plusieurs droites MN, PQ,..., l'on veut déterminer une droite XY telle que le multilatéral MN, PQ,..., XY ait une aire nulle, on devra tout d'abord choisir la grandeur et la direction de la droite RS, de telle sorte que l'on ait

$$MN + PQ + \ldots + RS \bumpeq 0,$$

d'où résulte

$$XY \triangleq RS;$$

puis l'autre condition

$$OMN + OPQ + \ldots + OXY = o$$

sera satisfaite, si l'on détermine le point X de manière que l'on ait

$$OM\,\mathrm{cj}.MN + OP\,\mathrm{cj}.PQ + \ldots + OX\,\mathrm{cj}.RS \triangleq o.$$

Le point X étant déterminé de cette manière, si l'on considère qu'un multilatéral d'aire nulle peut représenter un système de forces en équilibre (*), on voit que, *si les forces* MN, PQ,... *tournent d'un même angle autour de leurs points d'application* M, P,..., *leur résultante* YX *tourne elle-même d'un angle égal autour d'un point* X.

ADDITION DU TRADUCTEUR AU N° 120.

Quelques propriétés des barycentres.

1. *Si* MN, PQ,... *est un multilatéral, le barycentre* G *des points* M, P,... *est le même que celui* G' *des points* N, Q,....

En effet, on a

$$MN + PQ + \ldots \triangleq o,$$

ou

$$ON - OM + OQ - OP + \ldots \triangleq o,$$
$$ON + OQ + \ldots \triangleq OM + OP + \ldots,$$

c'est-à-dire, en appelant n le nombre des côtés,

$$n OG' \triangleq n OG;$$

d'où

$$OG' \triangleq OG.$$

Si LL', MM', NN' sont des droites égales et parallèles aux côtés BC,

(*) Il est facile, en effet, de voir que, si l'aire est nulle, la somme des moments est nulle par rapport à un point quelconque, de sorte que toutes les conditions d'équilibre sont remplies.

(*Note du Traducteur.*)

CA, AB d'un triangle, les deux triangles LMN, L'M'N' auront même barycentre; c'est une conséquence immédiate de ce qui précède.

2. *Soient* ABC *un triangle,* O *un point quelconque. Si l'on mène* $LL' \triangleq AO$, $MM' \triangleq BO$, $NN' \triangleq CO$, *et qu'on appelle* G *le barycentre du triangle* ABC, G_1 *celui du triangle* LMN, G'_1 *celui du triangle* L'M'N', *la figure* $OGG_1G'_1$ *sera un parallélogramme.*

On a effectivement

$$LO - L'O \triangleq AO,$$
$$MO - M'O \triangleq BO,$$
$$NO - N'O \triangleq CO,$$

et, par addition,

$$3\,G_1O - 3\,G'_1O \triangleq 3\,GO,$$
$$G_1G'_1 \triangleq GO.$$

Il est aisé d'étendre ce théorème à un système d'un nombre de points quelconque, et même de l'établir dans l'espace, ainsi que le précédent.

Si $LL' \triangleq n AO, \ldots,$ on aura $G_1G'_1 = n GO$. Si le point arbitraire O coïncide avec le barycentre G, les deux points G_1, G'_1 coïncideront. Il est aisé de voir qu'alors les droites LL', MM', NN' forment un multilatéral de trois côtés, correspondant à un triangle semblable à ABC.

3. *Soient* ABC *un triangle,* O *un point quelconque,* G *le barycentre; on mène* AA', BB', CC', *perpendiculaires et respectivement égales à* AO, BO, CO. *Si l'on appelle* G' *le barycentre du triangle* A'B'C', *les trois points* O, G, G' *formeront un triangle rectangle isoscèle.*

On aura, en effet,

$$AO - A'O \triangleq \surd AO,$$
$$BO - B'O \triangleq \surd BO,$$
$$CO - C'O \triangleq \surd CO,$$

et, par addition,

$$3\,GO - 3\,G'O \triangleq 3\surd GO,$$
$$GG' \triangleq \surd GO.$$

Si les angles A'AO,... étaient égaux à un angle α au lieu d'être droits, le triangle G'GO serait encore isoscèle, mais l'angle G serait égal à α; et, en général :

Si l'on forme les triangles OAA', OBB', OCC' *semblables entre eux, le triangle* OGG' *sera semblable à chacun des précédents.*

4. La propriété du n° 2 peut recevoir encore une extension assez intéressante :

Soient

A, B, C,... *un système de points de barycentre* G;

A', B', C',... *un système de points (en même nombre) de barycentre* G';

LL', MM', NN',... *une série de droites respectivement équipollentes à* AA', BB', CC',...;
G_1 *le barycentre du système des points* L, M, N,...;
G'_1 *le barycentre du système des points* L', M', N',....

La figure $GG'G'_1G_1$ *sera un parallélogramme.*

Car $LL' \triangleq AA'$ peut s'écrire

$$LO - L'O \triangleq AO - A'O.$$

De même

$$MO - M'O \triangleq BO - B'O,$$
$$NO - N'O \triangleq CO - C'O,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ajoutant

$$nG_1O - nG'_1O \triangleq nGO - nG'O,$$
$$G_1G'_1 \triangleq GG'.$$

5. *Soient*
A_1, A_2, ..., A_n *un système de* n *points sur un plan;*
G *le barycentre de tous ces points;*
G_p *celui de ces points, moins le point* A_p.

La figure $G_1G_2\ldots G_n$ *est homothétique à* $A_1A_2\ldots A_n$; *le centre de similitude est* G, *et le rapport de similitude* $\dfrac{1}{n-1}$.

On a

$$A_2A_3 + A_3A_4 + \ldots + A_nA_1 \triangleq A_2A_1,$$

ou

$$(A_2O + A_3O + \ldots + A_nO) - (A_3O + A_4O + \ldots + A_1O) \triangleq A_2A_1.$$

Ajoutant A_1O aux deux membres,

$$nGO - (n-1)G_2O \triangleq A_2O,$$
$$GO + (n-1)GG_2 \triangleq A_2O,$$
$$GG_2 \triangleq \frac{A_2G}{n-1}.$$

Exercices sur quelques questions de Géométrie supérieure.

121. Nous avons vu, au n° 29, que

$$AB.CD + AD.BC \triangleq AC.BD,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{AB.CD}{AD.CB} + \frac{AC.BD}{AD.BC} \triangleq 1.$$

Les doubles rapports qui forment les deux termes du premier membre de cette équipollence sont appelés par M. Chasles *rapports anharmoniques*, pourvu que, en outre, les quatre points A, B, C, D soient en ligne droite; mais, d'après le principe général (24) qui s'applique à la méthode des équipollences, toute propriété de points en ligne droite s'étend aux points d'un plan. Nous présenterons quelques exemples se rapportant à cette théorie.

122. Je démontrerai tout d'abord une formule très-facile à retenir de mémoire, laquelle comprend, comme cas particuliers, un grand nombre d'autres données par Mœbius, Chasles, etc. On propose d'exprimer un double rapport $\frac{DE.FG}{DG.FE}$ au moyen des doubles rapports $\frac{AB.CD}{CB.AD}$, $\frac{AB.CE}{CB.AE}$, $\frac{AB.CF}{CB.AF}$, $\frac{AB.CG}{CB.AG}$, dans lesquels les quatre points du premier sont rapportés à trois points constants A, B, C. Nous représenterons par d, e, f, g ces derniers doubles rapports.

On remarquera que nous ne suivons pas ici la convention, toujours adoptée par nous jusqu'à présent, consistant à indiquer par les lettres $d, \ldots$ des rapports numériques; tout au contraire, chacune de ces lettres pourra exprimer un nombre multiplié par une puissance quelconque du ramun.

Au moyen du théorème déjà cité (29), on a

$$
\begin{aligned}
-\,AC.DE &\;\underline{\underline{\frown}}\; AE.CD - AD.CE,\\
-\,AC.FG &\;\underline{\underline{\frown}}\; AG.CF - AF.CG,\\
-\,AC.DG &\;\underline{\underline{\frown}}\; AG.CD - AD.CG,\\
-\,AC.FE &\;\underline{\underline{\frown}}\; AE.CF - AF.CE.
\end{aligned}
$$

Substituant ces valeurs dans le double rapport $\frac{DE.FG}{DG.FE}$, celui-ci devient

$$\frac{(\mathrm{AE.CD}-\mathrm{AD.CE})(\mathrm{AG.CF}-\mathrm{AF.CG})}{(\mathrm{AG.CD}-\mathrm{AD.CG})(\mathrm{AE.CF}-\mathrm{AF.CE})},$$

que l'on reconnaît facilement comme identique à

$$\frac{(d-e)(f-g)}{(d-g)(f-e)}.$$

La même démonstration peut s'étendre à des rapports plus compliqués, de forme analogue au précédent, et que nous appellerons *rapports multiples*. Donc :

Connaissant tous les doubles rapports $\frac{\mathrm{AB.CD}}{\mathrm{CB.AD}} \triangleq d, \ldots,$ *tout autre rapport multiple sera déterminé par une formule analogue à*

$$\frac{\mathrm{DE.FG.MN}}{\mathrm{DN.MG.FE}} \triangleq \frac{(d-e)(f-g)(m-n)}{(d-n)(m-g)(f-e)}.$$

Si, dans le rapport que l'on veut exprimer au moyen des doubles rapports $d, e, f, \ldots,$ entrait quelqu'un des points A, B, C, la même formule subsisterait, pourvu qu'on fît la remarque que, évidemment, on a

$$c \triangleq \frac{\mathrm{AB.CC}}{\mathrm{CB.AC}} \triangleq 0,$$

$$b \triangleq \frac{\mathrm{AB.CB}}{\mathrm{CB.AB}} \triangleq 1,$$

$$a \triangleq \frac{\mathrm{AB.CA}}{\mathrm{CB.AA}} \triangleq \infty.$$

Ainsi, par exemple, on aura

$$\frac{\mathrm{AC.BD}}{\mathrm{BC.AD}} \triangleq \frac{b-d}{b-c} \triangleq 1-d \triangleq 1-\frac{\mathrm{AB.CD}}{\mathrm{CB.AD}},$$

$$\frac{\mathrm{AC.DE}}{\mathrm{DC.AE}} \triangleq \frac{d-e}{d},$$

$$\frac{\mathrm{AE.BD}}{\mathrm{BE.AD}} \triangleq \frac{1-d}{1-e} \triangleq \left(\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{AB}}-\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AD}}\right) : \left(\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{AB}}-\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{AE}}\right).$$

C'est la formule au moyen de laquelle M. Chasles (*Géométrie supérieure*, § 33) exprime le rapport anharmonique des points A, E, B, D au moyen d'un cinquième point C.

123. Soient pris arbitrairement les points A, B, C, D,..., et arbitrairement aussi les trois points A′, B′, C′, que nous considérons comme correspondant aux trois premiers. On détermine les points D′, E′,... de manière que

$$\frac{AB.CD}{CB.AD} \triangleq \frac{A'B'.C'D'}{C'B'.A'D'}, \ldots.$$

Tout rapport multiple entre les points A, B, C, D,... sera équipollent au rapport formé par les points correspondants A′, B′, C′, D′,...; c'est une conséquence immédiate du théorème du n° 122.

124. Si au premier système de points considéré appartient un point J situé à une distance infinie, on aura, quelle que soit la direction des droites tracées vers ce point,

$$\frac{CJ}{AJ} \triangleq 1;$$

par suite,

$$(1) \qquad \frac{AB.CJ}{CB.AJ} \triangleq \frac{AB}{CB} \triangleq \frac{A'B'.C'J'}{C'B'.A'J'}.$$

Semblablement, le point I du premier système, qui correspond à tout point I′ situé à une distance infinie et considéré comme appartenant au second, est donné par

$$(2) \qquad \frac{AB.CI}{CB.AI} \triangleq \frac{A'B'}{C'B'};$$

divisant l'une par l'autre ces deux équipollences, on obtient

(3) $$IA.J'A' \bumpeq IC.J'C'.$$

Tout ce que nous avons trouvé pour A, C peut se répéter pour deux autres points. Ainsi *les droites qui, de deux points* I, J′, *correspondant dans chaque système des points à l'infini de l'autre, vont aboutir à deux points correspondants, ont entre elles un produit constant en grandeur comme en direction.*

125. Les deux figures inverses étant situées sur le même plan, nous pourrons chercher le point E qui coïncide avec son propre correspondant E′. Nous emploierons, dans ce but, l'équipollence

$$IE.J'E \bumpeq IA.J'A' \quad (85)$$

ou

$$IE(IE - IJ') \bumpeq IA.J'A'.$$

Posant $IJ' \bumpeq 2IO$, on aura

$$(IE)^2 - 2IO.IE + (IO)^2 \bumpeq IA.J'A' + (IO)^2.$$

Pour extraire plus facilement la racine du second membre, nous supposerons que O′ soit, dans la seconde figure, le point qui correspond à O considéré comme appartenant à la première, si bien (124) que

$$IA.J'A' \bumpeq IO.J'O'.$$

D'après cela, nous aurons

(4) $$IE - IO \bumpeq \pm\sqrt{IO(IO + J'O')} \bumpeq \pm\sqrt{OJ'.OO'}.$$

Donc *il y a deux points* E, F *qui, dans deux figures inverses, coïncident avec leurs propres correspondants. La droite* FOE *est bissectrice de l'angle* J′OO′, *et les droites* $OE \bumpeq FO$ *sont moyennes proportionnelles entre* OJ′, OO′.

Ces conclusions sont identiques avec celles qui existent pour des points situés sur une même ligne droite (Chasles, *Géométrie supérieure*, § 154).

Si les points L, L_1 sont déterminés par l'équipollence

$$(OL)^2 \bumpeq IO.J'O',$$

nous verrons plus loin que E, F sont les foyers de l'ellipse ayant pour diamètres conjugués IOJ', LOL_1.

126. Connaissant les trois couples de points correspondants A, B, C, A', B', C', les centres d'inversion I, J' seront déterminés par les équipollences

$$(5)\quad AI \bumpeq \frac{AB.AC.C'B'}{AB.C'B'-A'B'.CB},\quad A'J' \bumpeq \frac{A'B'.A'C'.CB}{A'B'.CB-AB.C'B'},$$

lesquelles deviennent plus simples si l'on connaît les points E, F se correspondant à eux-mêmes, puisque alors on a

$$(6)\qquad EI \bumpeq \frac{CE.C'F}{CC'},\quad EJ' \bumpeq \frac{EC'.CF}{CC'}.$$

127. Si l'on considère les points E, F (dont chacun se correspond à lui-même), il y aura, pour tout couple de points correspondants, constance du double rapport

$$(7)\qquad \frac{EA'.FA}{EA.FA'} \bumpeq -\mu.$$

On a, en effet (123),

$$\frac{EB.FA}{EA.FB} \bumpeq \frac{EB'.FA'}{EA'.FB'}.$$

A l'équipollence (7), on peut donner la forme

$$\mu\frac{EA}{FA} + \frac{EA'}{FA'} \bumpeq 0$$

ou

$$(8)\qquad \frac{\mu}{\mathrm{FA}} + \frac{1}{\mathrm{FA'}} \bumpeq \frac{\mu + 1}{\mathrm{FE}},$$

puisque, en ajoutant la première avec la seconde multipliée par FE, on obtient une équipollence identique.

La relation (8) peut s'exprimer en disant que E est, *par rapport à l'origine* F, le *centre harmonique* des points A, A′, affectés des coefficients μ, 1. Dans cet énoncé, μ doit être regardé d'une façon générale comme imaginaire. On a aussi

$$\mu\frac{\mathrm{A'F}}{\mathrm{AF}} + \frac{\mathrm{A'E}}{\mathrm{AE}} \bumpeq 0$$

ou

$$(9)\qquad \frac{\mu}{\mathrm{AF}} + \frac{1}{\mathrm{AE}} \bumpeq \frac{\mu + 1}{\mathrm{AA'}},$$

d'où il résulte que A′ est, par rapport à l'origine A, le centre harmonique des points F, E, affectés des coefficients μ, 1.

128. L'imaginaire μ s'exprime très-facilement au moyen des centres d'inversion I, J′. Il suffit, en effet, de faire tendre vers l'infini l'un des points A, A′, pour que la relation (7) donne

$$(10)\qquad -\mu \bumpeq \frac{\mathrm{FI}}{\mathrm{EI}} \bumpeq \frac{\mathrm{EJ'}}{\mathrm{FJ'}}$$

ou

$$\mu\,\mathrm{J'F} + \mathrm{J'E} \bumpeq 0,$$

c'est-à-dire (99) que J′ est le barycentre des points F, E affectés des coefficients μ, 1.

129. Dans le cas particulier où

$$\mathrm{AB}.\mathrm{C'B'} \bumpeq \mathrm{A'B'}.\mathrm{CB},$$

les points I, J′ n'existent plus, et les deux figures, au lieu d'être inverses, sont *semblables;* le point E ci-dessus, qui coïncide avec son propre correspondant, est seul, et se trouve déterminé par

$$\frac{AB}{AE} \bumpeq \frac{A'B'}{A'E}.$$

Nous l'avons déjà trouvé, au n° 40, désigné par la lettre I.

130. Quand deux figures inverses ont leurs centres d'inversion coïncidant en un seul point I, il nous suffit, pour le trouver, d'avoir deux couples de points correspondants A, A', B, B'. En effet, de

$$IA.IA' \bumpeq IB.IB',$$

on déduit

$$IA.AA' \bumpeq IA(AB' + AB) + AB.AB'$$

ou

(1) $$AI \bumpeq \frac{AB\ AB'}{AB + A'B'}.$$

Les points E, F sont déterminés par l'équipollence

(2) $$IE \bumpeq -IF \bumpeq \sqrt{IA.IA'}.$$

Dans ce cas spécial, la valeur de μ est (128)

$$-FI : IF \bumpeq 1;$$

par suite, on a (127) le double rapport *harmonique*

$$\frac{EA'.FA}{EA.FA'} \bumpeq -1.$$

Ceci exprime que le quadrilatère EAFA', outre qu'il est inscriptible dans un cercle, a le produit de deux côtés opposés égal au produit des deux autres. Je l'appelle quadrilatère *harmonique,* parce qu'il est par rapport à un plan ce que sont par rapport à une droite deux couples de points conjugués harmoniques. Ainsi, par la construction des équipollences (1), (2), on trouve les deux points E, F, qui forment un quadrilatère harmonique, aussi bien avec A, A′ qu'avec B, B′.

131. Dans le cas ci-dessus d'un seul centre d'inversion I, si au point A de la première figure correspond le point A′ de la seconde, et que l'on considère ce point A′ comme appartenant à la première figure, il est évident qu'à ce point correspondra le point A dans la seconde figure. On aura, par suite (123),

$$(3)\qquad \frac{AB.CA'}{AA'.CB} \bumpeq \frac{A'B'.CA}{A'A.C'B'}$$

ou

$$(4)\qquad \frac{AB.CA'.B'C'}{AC'.B'A'.CB} \bumpeq 1.$$

En même temps que cette équipollence, et de la même manière, on en a aussi trois autres, que l'on obtient en disposant dans un autre ordre les points des trois couples A, A′, B, B′, C, C′. On a également

$$(5)\qquad \frac{AB.A'C}{AC.A'B} \bumpeq \frac{A'B'.AC'}{A'C'.AB'}$$

ou

$$(6)\qquad \frac{AB.A'C.AB'.A'C'}{AC'.A'B'.AC.A'B} \bumpeq 1,$$

et deux autres équipollences analogues.

Nous avons déjà parlé au n° 42 de ces relations simultanées entre six points d'un plan. En outre du point I, nous avons les deux points E, F, qui forment les trois quadrilatères harmoniques EAFA′, EBFB′, ECFC′.

132. Je pourrais étendre beaucoup plus ces applications de la méthode des équipollences; mais ce que j'ai dit me paraît suffisant pour faire connaître les avantages qu'elle présente en comparaison de l'application ordinaire de l'Algèbre à la Géométrie. Il est d'ailleurs évident que, par cette dernière méthode, on ne traite aucune question qui ne puisse aussi être traitée avec le secours du calcul des équipollences ; par exemple, lorsqu'on rapporte un point M à deux axes coordonnés passant par l'origine O et qu'on le détermine au moyen des coordonnées x, y, c'est comme si l'on posait

$$\mathrm{OM} \triangleq x + y\varepsilon^{\alpha},$$

α étant l'angle des deux axes coordonnés.

La méthode des équipollences, outre les avantages résultant des artifices qui lui sont propres, présente aussi celui de déterminer les positions respectives des éléments d'une figure, sans donner lieu à aucune chance d'erreur, parce qu'il n'est nécessaire d'avoir aucune figure sous les yeux, et que tout s'exécute au moyen d'un algorithme connu et selon des règles fixes.

QUATRIÈME PARTIE.

APPLICATIONS DIVERSES A LA THÉORIE DES COURBES.

Préliminaires.

133. En passant à l'étude des courbes, nous aurons encore occasion de reconnaître les avantages de notre méthode. Si nous voulons rapporter les points d'une courbe à des coordonnées orthogonales, nous pourrons poser

$$\mathrm{OM} \triangleq x + y\surd$$

et imaginer que les deux variables réelles x, y soient liées entre elles par une équation.

Mais il convient de considérer la question à un point de vue plus général ; nous traiterons ainsi en même temps et des coordonnées parallèles et des coordonnées polaires et des autres systèmes qui paraîtront s'appliquer le mieux à chaque circonstance spéciale.

Supposant que O soit un point fixe, si OM était donné par une équipollence sans aucune variable, le point M serait entièrement déterminé; mais si, dans cette équipollence entre une variable t, pouvant recevoir toutes les valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$, à chaque valeur de t correspondait un point différent M, tous ces points constitueraient un lieu géométrique ou une ligne : donc l'expression générale d'une ligne droite ou courbe est

$$\mathrm{OM} \bumpeq \Phi(t).$$

Dans la fonction Φ, entreront deux ou plusieurs droites connues de grandeur et de position, et pourra entrer aussi le ramun. Dans les cas spéciaux où la forme de la fonction est

$$\mathrm{OM} \bumpeq x + y\sqrt{}$$

ou

$$\mathrm{OM} \bumpeq z\varepsilon^{u},$$

en admettant que x, y ou z, u soient des fonctions réelles de t, la courbe sera rapportée aux coordonnées orthogonales ou aux coordonnées polaires.

134. Imaginant que t soit le temps, l'équipollence précédente

$$\mathrm{OM} \bumpeq \Phi(t)$$

exprime le mouvement d'un point le long d'une courbe déterminée et suivant une loi déterminée, si bien que, par les mêmes calculs, nous étudierons en même temps les diverses sortes de mouvements. La science du mouvement (*cinématique* d'Ampère) considérée comme un fait, sans se préoccuper des causes, tend toujours à s'associer de plus en plus à la science de l'étendue. Du reste, nous pourrons faire abstraction de cette considération, et examiner une courbe indépendamment du mouvement d'un point générateur.

135. Nous résoudrons les problèmes relatifs aux courbes en employant la forme générale

$$\mathrm{OM} \bumpeq \Phi(t),$$

sans attribuer à cette fonction une forme plutôt qu'une autre. Nous emploierons pour cet objet un calcul tout à fait semblable au calcul algébrique, sans qu'il soit aucunement nécessaire de recourir aux considérations de la Géométrie infinitésimale, ou à celles, peut-être plus rigoureuses et certainement plus pénibles, que leur ont substituées quelques mathématiciens plus *lagrangistes* que Lagrange lui-même.

Avant d'aborder les généralités, j'espère donner plus de clarté à mon exposition, en m'occupant de quelques cas particuliers.

Parabole.

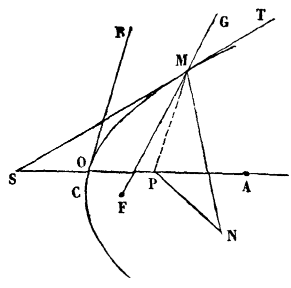
136. Cherchons les propriétés de la courbe exprimée par l'équipollence

$$(1) \qquad \mathrm{OM} \bumpeq t^2\mathrm{OA} + t\mathrm{OB},$$

où OA, OB (*fig.* 30) sont deux droites déterminées non parallèles, et où t est la variable réelle.

Faisant $t = 0$, nous voyons que la courbe passe par le point O; faisant $t = \pm\infty$, on s'aperçoit que la courbe a deux branches infinies, lesquelles tendent toujours de plus en plus à devenir parallèles à la droite OA (puisque $t = \infty$ rend tOB négligeable relativement à t^2OA). Ces

Fig. 30.



branches n'ont pas d'asymptotes, puisque toute droite parallèle à OA est coupée par l'une d'elles (*).

La courbe est appelée parabole.

137. Si le point M_1 de la courbe correspond à $t + \omega$, on a

$$MM_1 \bumpeq OM_1 - OM \bumpeq 2t\omega OA + \omega OB + \omega^2 OA.$$

Si ω diminue indéfiniment, MM_1 a pour limite une droite qui est dite *tangente* à la courbe. La direction de MM_1 est la même que celle de

$$MM_1 : \omega \bumpeq 2tOA + OB + \omega OA$$

dont la limite, lorsque l'on fait diminuer ω indéfiniment, est

$$MT \bumpeq 2tOA + OB. \tag{2}$$

(*) En effet, si une droite parallèle à OA coupe OB en D, il suffit de prendre $t = \dfrac{OD}{OB}$ pour avoir l'intersection.

(*Note du Traducteur.*)

On voit ainsi qu'au point O, correspondant à $t = 0$, la courbe est tangente à OB.

138. **Pour trouver le point S où la tangente MT rencontre OA, nous observerons que**

$$OS \bumpeq OM + MS$$

devra être parallèle à OA (en appelant aussi *parallèles* deux droites superposées) ; ce qui exprime (4) que le point S appartient à la droite OA.

Semblablement, MS devra être parallèle à la droite

$$MT \bumpeq 2t\,OA + OB ;$$

donc, ayant

$$OM \bumpeq t^2 OA + t\,OB,$$

on voit d'un coup d'œil que, pour que dans l'expression de OS n'entre pas la droite OB, on doit avoir

$$OS \bumpeq OM - t\,MT \bumpeq -t^2 OA.$$

La droite OM est la somme géométrique de

$$OP \bumpeq t^2 OA, \quad PM \bumpeq t\,OB ;$$

par suite

$$SO \bumpeq OP, \tag{3}$$

propriété connue de la tangente à la parabole.

139. Tirant MG, qui forme avec la tangente MT un angle égal à l'inclinaison de MT sur OA, une portion de MG sera exprimée (16) par

$$MG \bumpeq g(MT)^2 : OA - 4gt^2 OA + 4gt\,OB + g(OB)^2 : OA$$

et l'on aura

$$OG \bumpeq OM + MG.$$

Si F est le point de la droite MG correspondant à

$g = -\frac{1}{4}$, on a

(4) $$\mathrm{OF} \bumpeq -(\mathrm{OB})^2 : 4\mathrm{OA},$$

qui est indépendant de t; par suite, dans la parabole, il existe un point F (foyer), tel que chaque rayon vecteur FM forme avec la tangente en M un angle égal à l'inclinaison de cette tangente sur le diamètre OA.

140. Si un point pesant est lancé dans le vide, son mouvement se trouve exprimé par l'équipollence

$$\mathrm{OM} \bumpeq t^2\mathrm{OA} + t\mathrm{OB}.$$

La vitesse correspondante d'un tel mouvement est donnée en grandeur et en direction par l'expression

$$\mathrm{MT} \bumpeq 2t\mathrm{OA} + \mathrm{OB},$$

qui est la dérivée de OM par rapport au temps t. Les calculs du paragraphe précédent donnent

$$\mathrm{FM} \bumpeq (\mathrm{MT})^2 : 4\mathrm{OA}.$$

Cette équipollence signifie que la vitesse d'un point pesant est proportionnelle à la racine carrée de sa distance au foyer.

141. La droite

(5) $$\mathrm{NM} \bumpeq t\mathrm{OB} + (\mathrm{OB})^2 : 2\mathrm{OA}$$

fait avec la tangente

$$\mathrm{MT} \bumpeq 2t\mathrm{OA} + \mathrm{OB}$$

un angle égal à celui que forme OB avec OA (16).

Ayant $\mathrm{PM} \bumpeq t\mathrm{OB}$, on a aussi

(6) $$\mathrm{PN} \bumpeq -(\mathrm{OB})^2 : 2\mathrm{OA} \bumpeq 2\mathrm{OF},$$

c'est-à-dire que, en menant du pied P de l'ordonnée une droite équipollente à la constante 2OF, on obtient un point de la droite MN ci-dessus. Si l'angle AOB est droit, cela nous donne la propriété connue de la sous-normale PN.

142. En changeant l'origine O, nous pouvons tout ramener au cas où l'angle AOB est droit, ce qui rend les calculs plus simples. Si, en effet, C est un point de la parabole, de telle sorte que

$$\mathrm{OC} \bumpeq c^2\mathrm{OA} + c\mathrm{OB},$$

nous aurons

$$\begin{aligned} \mathrm{CM} &\bumpeq (t^2 - c^2)\,\mathrm{OA} + (t-c)\,\mathrm{OB} \\ &\bumpeq (t-c)^2\,\mathrm{OA} + (t-c)\,(2c\mathrm{OA} + \mathrm{OB}), \end{aligned}$$

équipollence de même forme que

$$\mathrm{OM} \bumpeq t^2\mathrm{OA} + t\mathrm{OB},$$

ce que l'on reconnaît évidemment en changeant $t - c$ en t, et $2c\mathrm{OA} + \mathrm{OB}$ en CB. Il sera toujours possible de donner à c une valeur telle que $2c\mathrm{OA} + \mathrm{OB}$ soit perpendiculaire à OA.

Changeant t en at, nous pouvons en outre rendre égales les deux droites qui sont multipliées par t^2 et par t; et, les prenant pour unité de longueur, on peut donner à l'équipollence de la parabole la forme plus simple

$$\mathrm{CM} \bumpeq t^2 + t\sqrt{\ }. \tag{7}$$

Dans ce cas, le foyer est donné par

$$\mathrm{CF} \bumpeq 1 : 4,$$

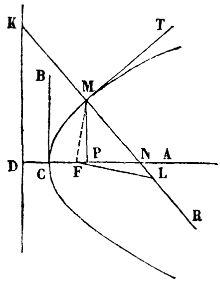
la tangente en M par

$$\mathrm{MT} \bumpeq 2t + \sqrt{\ }, \tag{8}$$

et la normale par

(9) $$\mathrm{MN} \triangleq \tfrac{1}{2} - t\sqrt{} \quad (\mathit{fig.}\ 31).$$

Fig. 31.



143. Un point R quelconque de la normale est donné par

$$\mathrm{CR} \triangleq \mathrm{CM} + 2p\,\mathrm{MN} \triangleq t^2 + p + (t - 2tp)\sqrt{}.$$

Pour que ce point R soit le point d'intersection de la normale MN avec celle infiniment voisine, il faut que le point R ne change pas lorsqu'on donne à t un accroissement infiniment petit ω, d'où résulte pour p un accroissement correspondant ϖ. Selon les principes du Calcul différentiel, cela s'exprime par $d\,\mathrm{CR} \triangleq 0$, ou

$$(2t + \sqrt{} - 2p\sqrt{})\,\omega + (1 - 2t\sqrt{})\,\varpi \triangleq 0.$$

Séparant la partie multipliée par le ramun, cette équipollence donne les deux équations

$$2t\,\omega + \varpi = 0,$$
$$(1 - 2p)\,\omega - 2t\varpi = 0.$$

On en déduit

$$2p = 4t^2 + 1;$$

par suite l'équipollence

(10) $$\mathrm{CR} \triangleq \tfrac{1}{2} + 3t^2 - 4t^3\sqrt{}$$

est celle de la développée de la parabole.

144. Le rayon de courbure est donc exprimé en grandeur et en direction par

$$\begin{aligned}\mathrm{MR} &\bumpeq 2t^2 + \tfrac{1}{2} - (t + 4t^3)\sqrt{}\\ &\bumpeq (1 + 4t^2)(\tfrac{1}{2} + t\sqrt{}) \bumpeq (1 + 4t^2)\,\mathrm{MN}.\end{aligned}$$

La droite MN, étant la somme géométrique de deux droites perpendiculaires, a pour longueur $\frac{1}{2}\sqrt{1 + 4t^2}$; par suite le rayon de courbure MR est proportionnel au cube de la normale MN, terminée à l'axe de la parabole. Si $\mathrm{ML} \bumpeq \frac{1}{2}\mathrm{MR}$, c'est-à-dire si L est le milieu de MR, ayant $\mathrm{CF} \bumpeq \frac{1}{4}$, on aura

$$\mathrm{FL} \bumpeq \mathrm{CM} + \mathrm{ML} - \mathrm{CF} \bumpeq 2t^2 + (\tfrac{1}{2} - 2t^2)\,t\sqrt{},$$

c'est-à-dire que FL est perpendiculaire à

$$\mathrm{FM} \bumpeq t^2 - \tfrac{1}{4} + t\sqrt{}.$$

Donc le rayon de courbure est double de la portion ML de la normale qui est hypoténuse du triangle MFL, rectangle au foyer F. Si l'on prend sur le prolongement du rayon RM la longueur $\mathrm{MK} \bumpeq \mathrm{LM}$, on a

$$(11) \qquad \mathrm{CK} \bumpeq -\tfrac{1}{4} + \left(\frac{3t}{2} + 2t^3\right)\sqrt{},$$

et par suite le point K appartient à la directrice DK de la parabole.

Ellipse.

145. L'ellipse est exprimée par l'équipollence

$$(1) \qquad \mathrm{OM} \bumpeq x\,\mathrm{OA} + y\,\mathrm{OB} \quad (\textit{fig.}\ 32),$$

pourvu que les quantités réelles x, y satisfassent à l'équation

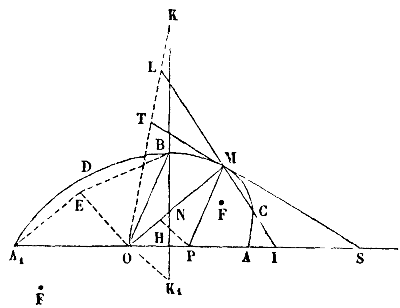
$$(2) \qquad x^2 + y^2 = 1,$$

ce que l'on peut faire en posant

$$x = \cos t, \quad y = \sin t.$$

Les deux valeurs égales, mais de signes contraires, que prend chaque variable pour toute valeur de l'autre, nous

Fig. 32.



montrent que OA et OB sont deux demi-diamètres conjugués de l'ellipse.

La direction de la tangente au point M est donnée par $dx\,\mathrm{OA} + dy\,\mathrm{OB}$, dx et dy étant liés par l'équation

$$x\,dx + y\,dy = 0,$$

qui est la dérivée de

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Par suite, nous déterminerons la direction de la tangente par l'équipollence suivante :

$$(3) \qquad \mathrm{MT} \bumpeq -y\,\mathrm{OA} + x\,\mathrm{OB}$$

que nous eussions pu obtenir immédiatement, en dérivant par rapport à t la relation

$$\mathrm{OM} \bumpeq \cos t\,\mathrm{OA} + \sin t\,\mathrm{OB}.$$

Cette tangente MT rencontre la droite OA au point S, que l'on détermine en faisant la somme géométrique de OM et d'une droite parallèle à MT telle que le terme contenant OB disparaisse. De là

$$(4)\qquad \mathrm{OS} \triangleq \mathrm{OM} - \frac{y}{x}\,\mathrm{MT} \triangleq \left(x + \frac{y^2}{x}\right)\mathrm{OA} \triangleq \frac{1}{x}\,\mathrm{OA}.$$

Par conséquent, si $\mathrm{OP} \triangleq x\mathrm{OA}$ (de sorte que PM soit parallèle à OB), on a

$$\mathrm{OP}.\mathrm{OS} \triangleq (\mathrm{OA})^2.$$

146. La droite

$$\mathrm{MN} \triangleq \mathrm{MT}\,\mathrm{OB} : \mathrm{OA} \triangleq -\,y\mathrm{OB} + x(\mathrm{OB})^2 : \mathrm{OA}$$

forme (16) avec la tangente l'angle constant AOB. On a

$$(5)\qquad \mathrm{ON} \triangleq \mathrm{OM} + \mathrm{MN} \triangleq x\mathrm{OA} + x(\mathrm{OB})^2 : \mathrm{OA} \triangleq x\mathrm{A}_1\mathrm{E},$$

si l'on pose

$$\mathrm{OE} \triangleq (\mathrm{OB})^2 : \mathrm{OA},$$

c'est-à-dire si l'on forme le triangle BOE directement semblable à AOB.

Il en résulte en outre

$$\mathrm{PN} \triangleq \mathrm{ON} - \mathrm{OP} \triangleq x\mathrm{OE},$$

et le triangle OPN est homothétique au triangle constant $\mathrm{A_1OE}$ (ayant pris $\mathrm{A_1O} \triangleq \mathrm{OA}$).

Quand OA, OB sont les axes, MN devient la normale, et elle coupe dans un rapport constant l'abscisse OP.

147. Si

$$c^2 + d^2 = 1$$

et

$$(6)\qquad \mathrm{OC} \triangleq c\mathrm{OA} + d\mathrm{OB},\quad \mathrm{OD} \triangleq -\,d\mathrm{OA} + c\mathrm{OB},$$

ces droites OC, OD, dont chacune est parallèle (145) à la tangente menée par l'extrémité de l'autre, sont deux demi-diamètres conjugués de l'ellipse.

En effet, on déduit des équipollences (6)

$$OA \simeq c\,OC - d\,OD, \quad OB \simeq d\,OC + c\,OD,$$

et, substituant,

$$OM \simeq (cx + dy)\,OC + (cy - dx)\,OD,$$

équipollence de la même forme que

$$OM \simeq \cos t\,OA + \sin t\,OB,$$

car il est facile de vérifier que l'on a

$$(cx + dy)^2 + (cy - dx)^2 = 1.$$

La première expression de la règle XII (57) nous montre immédiatement que les aires des triangles OCD, OAB sont égales entre elles.

148. Entre deux demi-diamètres conjugués a lieu (147) l'équipollence

$$(OC)^2 + (OD)^2 \simeq (OA)^2 + (OB)^2;$$

par suite, en posant

$$(OA)^2 + (OB)^2 \simeq (OF)^2, \tag{7}$$

nous déterminerons deux points indépendants du choix des diamètres. Ces points remarquables F, F_1 sont les foyers de l'ellipse.

L'équipollence

$$(OA)^2 \simeq (OF - OB)(OF + OB),$$

laquelle, au moyen de $OF \simeq -OF_1$, et en vertu de la règle I, se transforme en

$$(OA)^2 \simeq -BF.BF_1,$$

nous montre que : *en un point quelconque* B *de l'ellipse, les deux rayons vecteurs* BF, BF_1 *forment des angles* *égaux avec la tangente à la courbe, et leur produit est égal au carré du demi-diamètre* OA *parallèle à cette tangente.*

149. Le problème consistant à trouver les foyers d'une ellipse, étant donnés deux demi-diamètres conjugués, est directement résolu par l'équipollence (7). On peut la construire de plusieurs manières : ayant déterminé la droite OE (146), on a

$$(\mathrm{OF})^2 \bumpeq \mathrm{OA}\,(\mathrm{OA} + \mathrm{OE}) \bumpeq \mathrm{A_1O.A_1E};$$

par suite, l'excentricité OF sera moyenne proportionnelle entre OA et $\mathrm{A_1E}$, et parallèle à la bissectrice de l'angle $\mathrm{OA_1E}$.

Observant également que

$$(\mathrm{OF})^2 \bumpeq (\mathrm{OB} + \surd\,\mathrm{OA})\,(\mathrm{OB} - \surd\mathrm{OA}),$$

il suffira de mener BK, $\mathrm{BK_1}$ perpendiculaires et égales au demi-diamètre OA, et l'on aura

$$\mathrm{ON} \bumpeq \pm\sqrt{\mathrm{OK.OK_1}}.$$

Donc l'excentricité est aussi moyenne proportionnelle entre OK, $\mathrm{OK_1}$, et bissectrice de l'angle de ces deux droites.

150. Si l'on prend, sur l'une des droites OK, $\mathrm{OK_1}$, la longueur

$$\mathrm{OL} \bumpeq y\,\mathrm{OK} \bumpeq y\,(\mathrm{OB} + \mathrm{BK}),$$

on aura

$$\mathrm{LM} \bumpeq x\mathrm{OA} - y\mathrm{BK} \bumpeq (x - y\surd)\,\mathrm{OA}.$$

Or $x - y\surd$, puisque $x^2 + y^2 = 1$ exprime une droite égale à l'unité; par suite, LM est égale à OA.

On prolonge LM jusqu'à sa rencontre avec OA en I; il faudra donc joindre à

$$\mathrm{OL} \bumpeq y\,(\mathrm{OH} + \mathrm{HK})$$

une parallèle à

$$LM \triangleq x\,OA - y\,BK,$$

telle que OI ait la même direction que OA, c'est-à-dire que OH; et comme HK, BK ont la même direction, il en résulte que LI s'obtiendra en multipliant LM par le rapport numérique HK : BK, en sorte que

$$OI \triangleq y\,OH + x\,OA.HK : BK.$$

Ayant établi tout à l'heure que

$$\text{gr}.LM = \text{gr}.OA = \text{gr}.BK,$$

il en résulte que

$$\text{gr}.LI = \text{gr}.HK.$$

Par suite : *l'ellipse est décrite par le point* M *de la droite* IL *de longueur constante, qui se meut entre les droites fixes* OA, OK.

151. Dans le mouvement exprimé par l'équipollence

$$OM \triangleq \cos t\,OA + \sin t\,OB,$$

la vitesse est donnée en grandeur et en direction par la première dérivée par rapport au temps t

$$MT \triangleq -\sin t\,OA + \cos t\,OB.$$

La seconde dérivée est

$$-\cos t\,OA - \sin t\,OB \triangleq MO.$$

Cette expression, étant la dérivée de la vitesse, peut être appelée l'*accélération du mouvement* (*); elle égale,

(*) Nous traduisons par *accélération* le mot italien *turbazione*, peut-être plus expressif, en ce qu'il n'implique pas l'idée d'une *augmentation* de vitesse; mais nous tenons à n'employer, autant que possible, que des expressions bien connues dans le langage mathématique en France.
(*Note du Traducteur.*)

en grandeur et en direction, ce qu'on nomme la *force accélératrice*. La précédente équipollence nous montre que l'accélération du mouvement est exprimée par le demi-diamètre de l'ellipse, de sorte que ce mouvement est celui d'un point attiré par un centre en raison directe de la distance.

(*A suivre.*)