NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ABEL TRANSON

Sur le tétraèdre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 519-521

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__519_1>

SUR LE TÉTRAÈDRE;

PAR M. ABEL TRANSON.

Entre le triangle (*trigone*), qui est le plus simple des polygones, et le tétraèdre, qui est le plus simple des polyèdres, il existe plusieurs analogies dont l'une, que je présenterai à la fin de cette Note, n'a pas été, que je sache, remarquée jusqu'ici.

Comme il y a pour le triangle trois équations exprimant que chacun des côtés est égal à la somme des projections des deux autres sur lui-même, il y a, pour le tétraèdre, quatre équations exprimant que chacune des faces est égale à la projection des trois autres sur elle-même.

Soient les aires des faces du tétraèdre ABCD, représentées par a, b, c, d; et soient représentés chacun des angles dièdres par son arête, qui est en même temps l'une des arêtes du tétraèdre, de sorte que AB représentera l'angle dièdre qui est entre les faces c et d; AC l'angle entre d et b, etc.; on a les quatre équations

$$\begin{aligned} a &= b\cos\mathrm{CD} + c\cos\mathrm{DB} + d\cos\mathrm{BC},\\ b &= c\cos\mathrm{DA} + d\cos\mathrm{AC} + a\cos\mathrm{CD},\\ c &= d\cos\mathrm{AB} + a\cos\mathrm{BD} + b\cos\mathrm{DA},\\ d &= a\cos\mathrm{BC} + b\cos\mathrm{CA} + c\cos\mathrm{AB}. \end{aligned}$$

Or on peut déduire de ces équations des résultats analogues à ceux que procurent les trois équations du triangle.

Premièrement. — Si l'on élimine les trois angles adjacents à une même face, on obtient, pour le carré de cette face, la formule

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2cd\cos\mathrm{AB} - 2db\cos\mathrm{AC} - 2bc\cos\mathrm{AD},$$

ce qui correspond à la formule pour le côté du triangle en fonction des deux autres côtés et de l'angle qu'ils comprennent.

Deuxièmement. — Les quatre équations du tétraèdre étant homogènes et du premier degré par rapport aux faces, on peut éliminer celles-ci; et, par le simple développement d'un déterminant symétrique, on obtient la relation qui existe entre les six angles dièdres d'un tétraèdre, relation donnée autrefois dans les *Nouvelles Annales* (1846, p. 374), d'après un article de M. L. Clausen, inséré en 1832 dans le *Journal de Crelle* (t. VIII, p. 138); mais déjà, antérieurement, ainsi que l'a fait remarquer M. Terquem, cette relation avait été donnée dans les *Annales de Gergonne* (t. VI, p. 253, 1815-1816), par Bérard, alors professeur au lycée de Besançon (*).

Troisièmement. — Chaque face du tétraèdre est proportionnelle à une certaine fonction des éléments de

(*) La même relation est donnée sous forme d'un déterminant, et comme cas particulier d'une relation polyédrométrique très-générale, par M. le Dr Baltzer (*Théorie des déterminants*, trad. Hoüel, p. 217).

l'angle trièdre qui lui est opposé, ce qui constitue une belle analogie avec cette propriété du triangle, que les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés.

Voici ce qu'il en est : j'appellerai PA la demi-somme des angles dièdres qui composent l'angle trièdre A, de sorte qu'on aura

$$2\mathrm{PA} = \mathrm{AB} + \mathrm{AC} + \mathrm{AD}.$$

Cela posé, la formule

$$\sqrt{\cos \mathrm{PA} \cos(\mathrm{PA} - \mathrm{AB}) \cos(\mathrm{PA} - \mathrm{AC}) \cos(\mathrm{PA} - \mathrm{AD})},$$

impliquant exclusivement les éléments du trièdre A, on peut, sans ambiguïté, la désigner par le symbole $\varphi(\mathrm{A})$, et l'on voit ce que seront respectivement $\varphi(\mathrm{B})$, $\varphi(\mathrm{C})$, $\varphi(\mathrm{D})$. Or une combinaison convenable des quatre équations du tétraèdre conduit aux égalités suivantes :

$$\frac{a}{\varphi(\mathrm{A})} = \frac{b}{\varphi(\mathrm{B})} = \frac{c}{\varphi(\mathrm{C})} = \frac{d}{\varphi(\mathrm{D})}.$$