G. BELLAVITIS

Exposition de la méthode des équipollences

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 501-519

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__501_0>

EXPOSITION DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES

(suite, voir même tome, p. 297);

PAR M. G. BELLAVITIS.

(Traduit de l'italien par M. LAISANT, capitaine du Génie.)

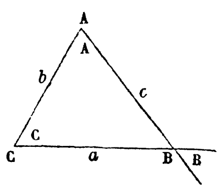
TROISIÈME PARTIE.

FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES ET QUELQUES AUTRES EXERCICES DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES.

Formules trigonométriques.

90. Pour qui connaît les expressions imaginaires des lignes trigonométriques et se rappelle (48) que le ramun (indiquant une droite égale à l'unité et d'inclinaison $+90$ degrés) se calcule précisément comme le signe $\sqrt{-1}$, il sera très-facile d'entendre ce qui va suivre. Je puis donc procéder rapidement, et commencer par la résolution d'un triangle dont les côtés ont pour longueurs a, b, c, et dont les angles opposés sont A, B, C (*fig.* 26).

Fig. 26.



L'inclinaison du côté CA sur le côté CB sera C, et l'inclinaison du côté AB sera $-$ B. Par suite, la règle I

$$\mathrm{CA} + \mathrm{AB} \mathrel{\underline{\frown}} \mathrm{CB}$$

nous donnera

(1) $$b\varepsilon^{C} + c\varepsilon^{-B} \stackrel{\frown}{=} a.$$

De cette équipollence, sans qu'il soit besoin d'aucune considération géométrique, nous tirerons la résolution du triangle, c'est-à-dire toutes les relations entre les cinq éléments a, b, c, B, C. Quant à l'angle A, il a pour valeur

$$A = \text{inc. AB} - \text{inc. AC} = -B - (C - \pi);$$

par conséquent

(2) $$A + B + C = \pi.$$

91. Pour trouver la relation entre deux côtés et les angles opposés, il suffira d'éliminer a de l'équipollence (1) combinée avec sa conjuguée

$$b\varepsilon^{-C} + c\varepsilon^{B} \stackrel{\frown}{=} a,$$

et nous aurons

(3) $$b(\varepsilon^{C} - \varepsilon^{-C}) \stackrel{\frown}{=} c(\varepsilon^{B} - \varepsilon^{-B}).$$

La règle XI nous montre que $\varepsilon^{C} - \varepsilon^{-C}$ représente une droite perpendiculaire à l'origine des inclinaisons, et dont la longueur dépend uniquement de l'angle C, puisque les droites représentées par ε^{C}, ε^{-C} ont une longueur égale à l'unité. On sait que la moitié de cette droite n'est autre que le sinus de l'angle C; par suite, l'équipollence (3) divisée par $2\surd$ donne

$$b \sin C = c \sin B.$$

92. Si nous décomposons (5) la droite inclinée ε^{C} en une droite d'inclinaison nulle, et une autre perpendiculaire à celle-là, et si nous appelons *cosinus* et *sinus* ces deux composantes, nous aurons

$$(1)\qquad \varepsilon^{C} \bumpeq \cos C + \sqrt{}\,\sin C,$$

équipollence qui, avec sa conjuguée

$$\varepsilon^{-C} \bumpeq \cos C - \sqrt{}\,\sin C,$$

donnera

$$(2)\qquad 2\cos C \bumpeq \varepsilon^{C} + \varepsilon^{-C},$$

$$(3)\qquad 2\sqrt{}\,\sin C \bumpeq \varepsilon^{C} - \varepsilon^{-C}.$$

Substituant à C son complément $\frac{\pi}{2} - C$, et se rappelant que $\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \bumpeq \sqrt{}$, on démontrerait que $\cos C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - C\right)$; mais il est inutile de s'arrêter à des notions aussi connues. La tangente étant le rapport du sinus au cosinus est donnée par

$$\operatorname{tang} C \bumpeq \frac{\varepsilon^{C} - \varepsilon^{-C}}{\sqrt{}\,(\varepsilon^{C} + \varepsilon^{-C})} \bumpeq \frac{\varepsilon^{2C} - 1}{\sqrt{}\,(\varepsilon^{2C} + 1)}.$$

93. Revenant à la résolution du triangle, cherchons la relation qui existe entre un angle et les côtés. De l'équipollence (1) du n° 90 nous devrons éliminer B, ce qui se fera immédiatement en multipliant

$$a - b\,\varepsilon^{C} \bumpeq c\,\varepsilon^{-B}$$

par l'équipollence conjuguée

$$a - b\,\varepsilon^{-C} \bumpeq c\,\varepsilon^{B},$$

et nous donnera

$$a^2 + b^2 - ab\,(\varepsilon^{C} + \varepsilon^{-C}) \bumpeq c^2.$$

Nous pourrons aisément, par la relation (2) du n° 92, en déduire la valeur de cos C. Autrement, en résolvant cette équipollence par rapport à ε^{C}, nous aurons

$$(4) \qquad \varepsilon^{C} \bumpeq \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + \surd \sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2}.$$

Cette équipollence, comparée à celle (1) du n° 92, donne les expressions de cos C et de sin C, au moyen des trois côtés. En outre, extrayant la racine de (4), et posant

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = m,$$

on a

$$(5) \qquad \varepsilon^{\frac{C}{2}} \bumpeq \sqrt{\frac{1+m}{2}} + \surd \sqrt{\frac{1-m}{2}},$$

d'où l'on tire aisément les expressions connues de $\cos\frac{C}{2}$, $\sin\frac{C}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{C}{2}$.

94. Il nous reste à chercher la relation entre deux côtés, l'angle compris et un angle opposé. De l'équipollence fondamentale (1) du n° 90 on élimine c en retranchant de

$$b\varepsilon^{B+C} + c \bumpeq a\varepsilon^{B}$$

l'équipollence conjuguée; puis on résout par rapport à ε^{B}, et l'on a

$$\varepsilon^{2B} \bumpeq \frac{a - b\varepsilon^{-C}}{a - b\varepsilon^{C}}.$$

Au moyen de la relation (4) du n° 92, on en déduit

$$(6) \qquad \operatorname{tang} B \bumpeq \frac{b \sin C}{a - b\cos C}$$

et aussi

$$(7) \ \operatorname{tang}\left(B + \frac{C}{2}\right) \bumpeq \frac{a\varepsilon^{C} - b}{a - b\varepsilon^{C}} : \left(\frac{a\varepsilon \ - b}{a - b\varepsilon^{C}} + 1\right) \surd \bumpeq \frac{a+b}{a-b} \operatorname{tang}\frac{C}{2}.$$

Cette relation pourrait aussi s'obtenir en décomposant, au moyen de la règle II, l'équipollence

$$b\varepsilon^{\frac{C}{2}} + c\varepsilon^{-B-\frac{C}{2}} \mathrel{\underline{\frown}} a\varepsilon^{-\frac{C}{2}}$$

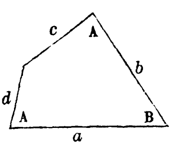
dans les deux équations

$$c\cos\left(B+\frac{C}{2}\right) = (a-b)\cos\frac{C}{2},$$

$$c\sin\left(B+\frac{C}{2}\right) = (a+b)\sin\frac{C}{2}.$$

95. Je ne m'arrêterai pas à démontrer, au moyen des équipollences du n° 92, les formules relatives aux lignes trigonométriques, ces notions étant très-connues. De préférence, j'ajouterai encore un exemple montrant que, dans notre méthode, il n'est nécessaire de recourir à aucune considération géométrique.

Fig. 27.



Supposons que, dans un quadrilatère (*fig.* 27) dont les côtés sont a, b, c, d, l'angle intérieur compris entre les côtés a, b ait pour valeur B, et que A soit la valeur des deux angles opposés compris entre les côtés b, c et d, a. En considérant les inclinaisons mutuelles des côtés, on voit que la règle I donne l'équipollence

$$a - b\varepsilon^{-B} + c\varepsilon^{-B-A} \mathrel{\underline{\frown}} d\varepsilon^{A}.$$

On éliminera B, en multipliant membre à membre l'équipollence

$$a - d\varepsilon^{A} \mathrel{\underline{\frown}} (b - c\varepsilon^{-A})\varepsilon^{-B}$$

par sa conjuguée. On obtient ainsi

$$(ad - bc)\,(\varepsilon^{A} + \varepsilon^{-A}) \bumpeq a^2 - b^2 - c^2 + d^2,$$

d'où l'on peut déduire (93) les valeurs de cos A, sin A, $\sin\frac{A}{2}, \ldots$

96. Si u est l'inclinaison de la droite LM sur AB, on a

$$\mathrm{LM} : \mathrm{AB} \bumpeq \varepsilon^{u}\, \mathrm{gr.\,LM} : \mathrm{gr.\,AB},$$

et, multipliant (52) par AB cj. AB $\bumpeq$ gr² AB,

$$(1) \qquad \mathrm{cj.\,AB.LM} \bumpeq \mathrm{gr.\,AB\,gr.\,LM}\ \varepsilon^{u}.$$

Combinant cette équipollence (1) avec sa conjuguée, il en résulte

$$(2) \quad \surd\,(\mathrm{AB\,cj.\,LM} - \mathrm{cj.\,AB.LM}) \bumpeq 2\,\mathrm{gr.\,AB\,gr.\,LM}\sin u,$$

$$(3) \quad \mathrm{AB\,cj.\,LM} + \mathrm{cj.\,AB.LM} \bumpeq 2\,\mathrm{gr.\,AB\,gr.\,LM}\cos u.$$

Si l'on change LM en AC, la relation (2) nous donne, d'après la règle XII, l'aire du triangle ABC. Les équipollences (2) et (3) peuvent être regardées comme des conséquences des règles XI et X.

Au premier membre de la relation (3) on peut faire subir une transformation telle, que tous les termes soient réduits à avoir une inclinaison nulle, si bien que l'équipollence se change en une équation. On a, en effet,

$$\begin{aligned}
\mathrm{AB\,cj.LM} + \mathrm{cj.\,AB.\,LM} &\bumpeq \mathrm{AB(cj.\,AM - cj.AL) + cj.AB(AM - AL)} \\
&\bumpeq \mathrm{(AL - AB)\,(cj.\,AL - cj.\,AB)} \\
&\qquad - \mathrm{(AM - AB)\,(cj.\,AM - cj.\,AB)} \\
&\qquad - \mathrm{AL\,cj.\,AL + AM\,cj.\,AM} \\
&\bumpeq \mathrm{BL\,cj.\,BL - BM\,cj.\,BM} \\
&\qquad - \mathrm{AL\,cj.\,AL + AM\,cj.\,AM}.
\end{aligned}$$

Ainsi nous aurons (52)

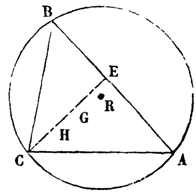
$$(4)\quad 2\,\mathrm{gr.AB\,gr.LM}\cos u \triangleq \mathrm{gr^2AM} + \mathrm{gr^2BL} - \mathrm{gr^2AL} - \mathrm{gr^2BM}.$$

97. Si, aux règles rappelées plus haut (61), nous ajoutons les définitions exprimées par les formules du n° 92, et les relations (3), (4) du numéro précédent, nous aurons tous les principes de la méthode des équipollences, appliquée à l'étude des figures planes composées de points, de droites ou de circonférences. Toute considération de Géométrie ou de Trigonométrie devient superflue, parce que tout se trouve implicitement compris dans la méthode elle-même; mais, comme on ne peut employer rapidement un instrument, si simple qu'il soit, à moins qu'un exercice répété n'en ait rendu l'usage habituel, nous ajouterons ici divers exemples. On pourra d'ailleurs les étudier seulement jusqu'au n° 120, ou même jusqu'au n° 109, et passer ensuite à la théorie des courbes (133), qui forme la dernière partie de ce Mémoire.

Exercices sur le triangle.

98. Problème. — *Étant donnés deux côtés* CA $= b$ (*fig.* 28), CB $= a$ *et l'angle compris* C, *déterminer la*

Fig. 28.



distance CE $= z$ *du sommet* C *à un point* E *qui divise la base dans un rapport donné.*

La condition du problème est exprimée par $AE \triangleq \frac{e}{c} AB$; appelant u l'angle ACE, on aura

$$c(z\varepsilon^u - b) \triangleq e(a\varepsilon^C - b).$$

Isolant $z\varepsilon^u$, puis multipliant par l'équipollence conjuguée, u disparaît et z est donné par la relation

$$z^2 \triangleq \frac{b^2(c-e)^2 + a^2e^2}{c^2} + \frac{abe(c-e)}{\;}(\varepsilon + \varepsilon^{-C}),$$

dans laquelle (92)

$$\varepsilon^C + \varepsilon^{-C} = 2\cos C.$$

Si c est la longueur du côté AB (et par suite $AE = e$), on a

$$c^2 \triangleq AB\,\mathrm{cj}.AB \triangleq (a\varepsilon^C - b)(a\varepsilon^{-C} - b) \triangleq a^2 + b^2 - ab(\varepsilon^C + \varepsilon^{-C}).$$

Ainsi, de la précédente relation donnant z^2, nous pourrons éliminer l'angle C. Nous aurons de la sorte

$$cz^2 = b^2(c-e) + a^2e - (ce - e),$$

ou

$$AB.(CE)^2 = AE.(CB)^2 + EB.(CA)^2 - AB.AE.EB.$$

99. Théorème. — *Quels que soient les points* A, B, C,..., *et les coefficients numériques* m, m', m'',..., *il existe un point* G, *tel que*

$$m\,GA + m'\,GB + m''\,GC + \ldots \triangleq 0.$$

Dans le cas de trois points seulement, les aires des triangles GAB, GBC, GCA, ABC *sont proportionnelles aux coefficients* m'', m, m', $m + m' + m''$.

Ayant choisi arbitrairement un point O (qui pourra être un des points donnés A, B,...), il sera facile de construire OG, de telle sorte que

$$(m + m' + \ldots)\,OG \triangleq m\,OA + m'\,OB + \ldots,$$

et, d'après la règle I, on verra que le seul point G, ainsi déterminé, satisfait à la condition demandée par le théorème; nous appellerons ce point le *barycentre* (*) des points A, B,... affectés respectivement des coefficients (ou *masses*) m, m',.... Quand tous les coefficients sont égaux, G est dit le *barycentre* des points A, B,....

100. Si, de la précédente équipollence multipliée par cj.OP, nous retranchons sa conjuguée multipliée par OP, nous obtiendrons

$$(m + m' + \ldots)(\mathrm{OG\,cj.OP} - \mathrm{cj.OG.OP})$$
$$\triangleq m(\mathrm{OA\,cj.OP} - \mathrm{cj.OA.OP}) + m'(\mathrm{OB\,cj.OP} - \mathrm{cj.OB.OP}) + \ldots.$$

De là, d'après la règle XII,

$$(m + m' + \ldots)\,\mathrm{GOP} = m\,\mathrm{AOP} + m'\,\mathrm{BOP} + \ldots.$$

Faisant coïncider O, P successivement avec deux des trois points A, B, C, on a les équations

$$(m + m' + m'')\,\mathrm{GBC} = m\ \mathrm{ABC},$$
$$(m + m' + m'')\,\mathrm{GCA} = m'\,\mathrm{BCA},$$
$$(m + m' + m'')\,\mathrm{GAB} = m''\,\mathrm{CAB},$$

qui démontrent la seconde partie du théorème.

On fera attention (57) au signe négatif que prend l'aire d'un triangle lorsqu'on renverse l'ordre dans lequel sont énoncés les sommets.

101. PROBLÈME. — *De quels coefficients faut-il affecter les sommets d'un triangle* ABC, *pour que leur barycentre soit le centre* R *du cercle circonscrit?*

(*) Nous employons avec M. Bellavitis ce mot de *barycentre*, plus laconique et peut-être plus expressif que l'expression *centre de gravité*, dont il est l'équivalent. (*Note du Traducteur.*)

Nous pourrions admettre, comme choses très-connues, que l'angle ARB (*fig.* 28) est double de ang. ACB $=$ C, et que l'aire du triangle ARB est proportionnelle au sinus de ARB; nous le démontrerons néanmoins au moyen des équipollences.

Pour exprimer la condition que R est équidistant des trois sommets, nous poserons

$$\mathrm{RA} \bumpeq r\varepsilon^{\alpha}, \quad \mathrm{RB} \bumpeq r\varepsilon^{\beta}, \quad \mathrm{RC} \bumpeq r\varepsilon^{\gamma}.$$

D'après la règle XII et le n° 51, on a

$$\mathrm{RAB} \bumpeq \frac{\surd}{4} r^2 \left(\varepsilon^{\alpha-\beta} - \varepsilon^{-\alpha+\beta}\right) = \frac{r^2}{2} \sin(\beta - \alpha),$$

et, d'après les règles IX et I, le double de l'inclinaison du côté CB, moins le double de l'inclinaison de CA ou 2C, est donné par

$$\mathrm{CB\,cj.CA : cj.CB.CA} \bumpeq (\varepsilon^{\beta} - \varepsilon^{\gamma})(\varepsilon^{-\alpha} - \varepsilon^{-\gamma}) : (\varepsilon^{-\beta} - \varepsilon^{-\gamma})(\varepsilon^{\alpha} - \varepsilon^{\gamma})$$
$$\bumpeq \varepsilon^{\gamma+\beta}\,\varepsilon^{-\gamma-\alpha} \bumpeq \varepsilon^{2\mathrm{C}}.$$

Donc $\beta - \alpha = 2\mathrm{C}$. De là, et d'après le théorème précédent, nous aurons

$$(1) \qquad \sin 2\mathrm{A}.\mathrm{RA} + \sin 2\mathrm{B}.\mathrm{RB} + \sin 2\mathrm{C}.\mathrm{RC} \bumpeq 0.$$

102. Problème. — *Déterminer l'intersection commune* H *des trois hauteurs d'un triangle* ABC (*fig.* 28).

La condition que CH, BH soient perpendiculaires aux côtés AB, CA est exprimée par

$$\surd\,\mathrm{CH} \bumpeq n\,\mathrm{AB}, \quad \surd\,\mathrm{BH} \bumpeq m\,\mathrm{CA},$$

équipollences au moyen desquelles nous devrons déterminer m et n. Nous éliminerons d'abord le point inconnu H, ce qui donnera

$$\surd\,\mathrm{CB} \bumpeq n\,\mathrm{AB} - m\,\mathrm{CA},$$

puis, au moyen de la conjuguée, nous obtiendrons

$$\sqrt{}(\text{CB}\,\text{cj}.\text{CA} + \text{cj}.\text{CB}.\text{CA}) \triangleq n(\text{AB}\,\text{cj}.\text{CA} - \text{cj}.\,\text{AB}.\text{CA}).$$

Par les formules (3), (2) du n° 96, ou bien par les règles X et XI, la valeur de n se réduira à une expression trigonométrique. Écrivant CB — CA à la place de AB, on trouve

$$n = \sqrt{}(\text{CB}\,\text{cj}.\text{CA} + \text{cj}.\text{CB}.\text{CA}) : (\text{CB}\,\text{cj}.\text{CA} - \text{cj}.\text{CB}.\text{CA}) = \cot \text{C}.$$

Donc CH est égal au côté AB divisé par la tangente de l'angle opposé C. Le point H n'eût pas changé si l'on avait cherché, au contraire, l'intersection des droites CH, AH, perpendiculaires aux côtés opposés.

ADDITION DU TRADUCTEUR AU N° 102.

THÉORÈME. — *Les trois hauteurs d'un triangle se rencontrent en un même point.*

On peut démontrer ce théorème sans chercher à déterminer le point commun, et sans avoir besoin de recourir aux expressions conjuguées. Soit H le point de rencontre des perpendiculaires CH et BH, abaissées respectivement sur AB et CA. On aura

$$(1) \qquad \sqrt{}\text{CH} \triangleq n\,\text{AB}, \quad \sqrt{}\text{BH} \triangleq m\,\text{CA}.$$

Il s'agit de faire voir que AH est perpendiculaire à BC, c'est-à-dire qu'on a

$$\sqrt{}\text{AH} \triangleq l\,\text{BC},$$

l étant un nombre.

Or les équipollences (1) peuvent s'écrire

$$\sqrt{}(\text{AH} - \text{AB} - \text{BC}) \triangleq n\,\text{AB},$$
$$\sqrt{}(\text{AH} - \text{AB}) \triangleq -m\,\text{AB} - m\,\text{BC}.$$

En éliminant AB entre ces deux relations, on trouve

$$(2) \qquad \sqrt{}\text{AH} \triangleq \frac{1 - mn}{m + n}\text{BC}.$$

AH est donc bien perpendiculaire à BC, et le coefficient l dont il est parlé ci-dessus est

$$l = \frac{1 - mn}{m + n},$$

ce qui donne entre les trois coefficients la relation remarquable

$$lm + mn + nl = 1.$$

Cette relation peut prendre la forme

$$\frac{\text{gr.AH gr.BH}}{\text{gr.BC gr.CA}} + \frac{\text{gr.BH gr.CH}}{\text{gr.CA gr.AB}} + \frac{\text{gr.CH gr.AH}}{\text{gr.AB gr.BC}} = 1,$$

ou

$$\text{gr.AH gr.HB gr.BA} + \text{gr.BH gr.HC gr.CB} + \text{gr.CH gr.HA gr.AC}$$
$$= \text{gr.AB gr.BC gr.CA},$$

c'est-à-dire que *la somme des produits des côtés des triangles* HAB, HBC, HCA, *pris séparément, est égale au produit des trois côtés du triangle* ABC.

103. Si l'on a

$$\text{AB} \triangleq \text{tang C}.\sqrt{\text{CH}},$$
$$\text{BC} \triangleq \text{tang A}.\sqrt{\text{AH}},$$
$$\text{CA} \triangleq \text{tang B}.\sqrt{\text{BH}},$$

l'équipollence

$$\text{BC} + \text{CA} + \text{AB} \triangleq 0$$

nous donne

$$(2) \qquad \text{tang A}.\text{HA} + \text{tang B}.\text{HB} + \text{tang C}.\text{HC} \triangleq 0.$$

Les équipollences (1), (2) nous montrent de quels coefficients il faut affecter les sommets du triangle, pour que leur barycentre soit le centre R du cercle circonscrit, ou bien le point de rencontre H des trois hauteurs.

104. Rapportons ce point H au centre du cercle circonscrit. D'après ce qui a été exposé au n° 101, nous aurons

$$\text{AB} \triangleq r(\varepsilon^{\beta} - \varepsilon^{\alpha}), \quad \text{tang C} \triangleq \frac{\varepsilon^{\beta-\alpha} - 1}{\sqrt{(\varepsilon^{\beta-\alpha} + 1)}} \quad [92\,(4)].$$

Par suite,

$$\text{CH} \triangleq r(\varepsilon^{\beta} + \varepsilon^{\alpha}) \triangleq \text{RB} + \text{RA},$$

relation exprimant que CH est double de la distance du centre R au côté AB, on en conclut l'équipollence remarquable

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{RH} \bumpeq \mathrm{RA} + \mathrm{RB} + \mathrm{RC}.$$

Si G est le barycentre des points A, B, C (et il est appelé alors en même temps barycentre du triangle), on a, quel que soit R,

$$3\mathrm{RG} \bumpeq \mathrm{RA} + \mathrm{RB} + \mathrm{RC};$$

donc

$$\mathrm{RH} \bumpeq 3\mathrm{RG},$$

c'est-à-dire que, *dans tout triangle, le barycentre est situé au tiers de la droite qui va du centre du cercle circonscrit au point de rencontre des trois hauteurs.*

105. Voici une conséquence bien facile de l'équipollence (3). Si à la circonférence de centre R appartient un quatrième point D, et si l'on fait

$$\mathrm{RI} \bumpeq \mathrm{RA} + \mathrm{RB} + \mathrm{RD},$$
$$\mathrm{RL} \bumpeq \mathrm{RA} + \mathrm{RD} + \mathrm{RC},$$
$$\mathrm{RM} \bumpeq \mathrm{RD} + \mathrm{RB} + \mathrm{RC},$$

I, L, M seront les points de rencontre des hauteurs des triangles ABD, ADC, DBC. Il résulte de ces équipollences que

$$\mathrm{HI} \bumpeq \mathrm{RI} - \mathrm{RH} \bumpeq \mathrm{CD}, \quad \mathrm{HL} \bumpeq \mathrm{BD}, \quad \mathrm{HM} \bumpeq \mathrm{AD}.$$

Par suite, la figure HILM est égale à DCBA et semblablement placée.

106. Les quatre points A, B, C, H sont liés entre eux par cette propriété, que la droite qui joint deux d'entre eux est perpendiculaire à celle qui passe par les deux autres. Soit O (*fig.* 29) leur barycentre, c'est-à-dire (99) soit qu'on ait

$$\mathrm{OA} + \mathrm{OB} + \mathrm{OC} + \mathrm{OH} \bumpeq 0.$$

A l'équipollence (3) on peut, au moyen de la règle I, donner la forme

$$2OR \bumpeq OA + OB + OC - OH;$$

par suite,

$$OR \bumpeq HO.$$

Pareillement, si R_1, R_2, R_3 sont les centres des cercles circonscrits à HBC, AHC, ABH, on aura

$$OR_1 \bumpeq AO, \quad OR_2 \bumpeq BO, \quad OR_3 \bumpeq CO.$$

La figure R, R_1, R_2, R_3 est égale à HABC et semblablement placée; chaque côté de l'une de ces figures divise perpendiculairement un côté de l'autre en parties égales; A est le centre du cercle circonscrit à $R_1 R_2 R_3, \ldots.$

107. Le point O ci-dessus, qui se trouve déterminé par l'équipollence

$$(4) \qquad RO \bumpeq \tfrac{1}{2} RH \bumpeq \tfrac{3}{2} RG \bumpeq \tfrac{1}{2}(RA + RB + RC),$$

est digne de remarque. Le point milieu A^0 du côté BC est donné par

$$RA^0 \bumpeq \tfrac{1}{2}(RB + RC);$$

par suite,

$$OA^0 \bumpeq -\tfrac{1}{2} RA.$$

Donc les points A^0, B^0, C^0 sont sur une circonférence de centre O et d'un rayon égal à la moitié de celui de la circonférence ABC.

Sur cette même circonférence $A^0B^0C^0$, le point A', diamétralement opposé à A^0, sera le milieu de AH (puisque O est le barycentre des quatre points A, B, C, H); en effet, l'équipollence

$$OA' \bumpeq - OA^0 \bumpeq \tfrac{1}{2} RA$$

donne

$$OA' \bumpeq \tfrac{1}{2}(OA - OR) \bumpeq \tfrac{1}{2}(OA + OH),$$

car (106)

$$-\,OR = OH.$$

Tout angle droit $A^0 A_1 A'$ est incrit dans la demi-circonférence de centre O, et, par suite, cette circonférence passe aussi par A_1. Donc :

Pour tout triangle ABC, *il existe un cercle (dont le rayon est la moitié de celui du cercle circonscrit) qui coupe les côtés en leurs points milieux, et passe aussi par les pieds des trois hauteurs du triangle ; il divise, en outre, en deux parties égales ces perpendiculaires* AH, BH, CH, *terminées à leur point commun d'intersection. Son centre est situé au milieu de la droite qui unit le centre du cercle circonscrit au point d'intersection* H *des trois hauteurs.*

108. Problème. — *Déterminer le centre* P *du cercle inscrit dans le triangle* ABC (*fig.* 29).

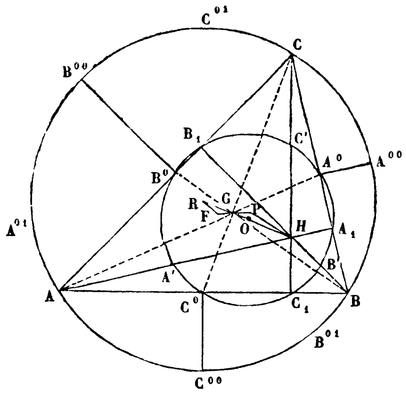
Les triangles PAB, PBC, PCA, ayant des hauteurs égales, sont proportionnels à leurs bases, lesquelles sont elles-mêmes proportionnelles aux sinus des angles opposés; par suite (99), on a

$$(5) \qquad \sin A.PA + \sin B.PB + \sin C.PC = 0.$$

Nous pourrons exprimer les relations (1), (2), (5), en disant que *le centre du cercle circonscrit, le point de rencontre des trois hauteurs et le centre du cercle inscrit sont les barycentres des sommets du triangle, affectés de coefficients respectivement proportionnels aux produits des sinus par les cosinus, aux tangentes, ou aux sinus des angles opposés.*

Les arcs BC, CA, AB du cercle circonscrit étant divisés par moitié en A^{00}, B^{00}, C^{00}, le centre P du cercle inscrit est le point de rencontre des droites AA^{00}, BB^{00}, CC^{00}, lesquelles sont perpendiculaires aux côtés du triangle

Fig. 29.



$A^{00}B^{00}C^{00}$; P est donc, par rapport à ce triangle, ce qu'est H par rapport à ABC, et, par suite, la relation (3) nous donne

(6) $$RP \triangleq RA^{00} + RB^{00} + RC^{00}.$$

Si l'on n'avait pas voulu profiter de ces faciles considérations géométriques, les formules du n° 101 nous eussent conduit directement à l'équipollence (6), à laquelle on peut donner la forme

$$A^{00}P \triangleq C^{01}B^{00} \triangleq B^{01}C^{00},$$

C^{01}, B^{01}, A^{01} étant les points diamétralement opposés à C^{00}, B^{00}, A^{00}. Ces points, de même que C^{00}, B^{00}, A^{00}, divisent aussi en parties égales les arcs AB, CA, BC, et l'on a trois autres points P_1, P_2, P_3, équidistants des côtés du triangle ABC, et qui sont les centres des cercles *exinscrits*. Ils sont fournis par les équipollences

$$RP_1 \bumpeq RA^{00} + RB^{01} + RC^{01} \bumpeq RA^{00} - RB^{00} - RC^{00},$$
$$RP_2 \bumpeq - RA^{00} + RB^{00} - RC^{00},$$
$$RP_3 \bumpeq - RA^{00} - RB^{00} + RC^{00}.$$

Elles nous montrent que A^{00}, B^{00}, C^{00}, A^{01}, B^{01}, C^{01} sont les milieux des distances PP_1, PP_2, PP_3, $P_2 P_3$, $P_1 P_3$, $P_2 P_1$, et que

(7) $$RP \bumpeq RP_1 + RP_2 + RP_3 \bumpeq 0,$$

c'est-à-dire que *le centre du cercle circonscrit est le barycentre des quatre centres des cercles inscrit et exinscrits.*

Ce que les points H, O sont par rapport au triangle ABC, les points P, R le sont par rapport au triangle $P_1 P_2 P_3$, et, sur la droite PR, on pourrait également déterminer les points qui seraient, par rapport au second triangle, ce que sont G, R par rapport au premier.

109. Cherchons à déterminer par voie directe le rayon p du cercle inscrit, au moyen de celui r du cercle circonscrit. Si les inclinaisons α, β, γ (101) sont rangées par ordre de grandeurs croissantes, les perpendiculaires abaissées de P sur les côtés AB, BC, CA seront $p\varepsilon^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$, $p\varepsilon^{\frac{\beta+\gamma}{2}}$, $-p\varepsilon^{\frac{\gamma+\alpha}{2}}$. Puisque le pied de la première tombe sur la droite AB, dont les extrémités sont données par

$$RA \bumpeq r\varepsilon^{\alpha}, \quad RB \bumpeq r\varepsilon^{\beta},$$

on devra avoir (44)

$$RP + p\varepsilon^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \bumpeq (1 - m)\, r\varepsilon^{\alpha} + mr\varepsilon^{\beta},$$

ou

$$\frac{RP + p\varepsilon^{\frac{\alpha+\beta}{2}} - r\varepsilon^{\alpha}}{\varepsilon^{\beta} - \varepsilon^{\alpha}} \bumpeq mr.$$

Le premier membre doit donc être équipollent à son conjugué

$$\frac{\text{cj.}\,\mathrm{RP} + p\,\varepsilon^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} - r\varepsilon^{-\alpha}}{\varepsilon^{-\beta} - \varepsilon^{-\alpha}} \triangleq \varepsilon^{\alpha+\beta}\,\frac{\text{cj.}\,\mathrm{RP} + p\,\varepsilon^{\frac{\alpha+\beta}{2}} - r\varepsilon^{\beta}}{\varepsilon^{\alpha} - \varepsilon^{\beta}}\,;$$

d'où

$$2p \triangleq r\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} + r\varepsilon^{\frac{\beta-\alpha}{2}} - \varepsilon^{-\frac{\alpha+\beta}{2}}\,\mathrm{RP} - \varepsilon^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\,\text{cj.}\mathrm{RP}.$$

De la même manière, les deux autres perpendiculaires donneront

$$2p \triangleq r\left(\varepsilon^{\frac{\beta-\gamma}{2}} + \varepsilon^{\frac{\gamma-\beta}{2}}\right) - \varepsilon^{-\frac{\beta+\gamma}{2}}\,\mathrm{RP} - \varepsilon^{\frac{\beta+\gamma}{2}}\,\text{cj.}\mathrm{RP},$$

$$-\,2p \triangleq r\left(\varepsilon^{\frac{\gamma-\alpha}{2}} + \varepsilon^{\frac{\alpha-\gamma}{2}}\right) - \varepsilon^{-\frac{\gamma+\alpha}{2}}\,\mathrm{RP} - \varepsilon^{\frac{\gamma+\alpha}{2}}\,\text{cj.}\mathrm{RP}.$$

Dans ces trois équipollences, nous considérerons RP, cj. RP, $2\,p$, comme trois inconnues différentes, et nous trouverons

$$\mathrm{RP} \triangleq r\left(\varepsilon^{\frac{\alpha+\beta}{2}} + \varepsilon^{\frac{\beta+\gamma}{2}} - \varepsilon^{\frac{\gamma+\alpha}{2}}\right),$$

$$(8)\quad 2\left(\frac{p+r}{r}\right) \triangleq \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} + \varepsilon^{\frac{\beta-\alpha}{2}} + \varepsilon^{\frac{\beta-\gamma}{2}} + \varepsilon^{\frac{\gamma-\beta}{2}} - \varepsilon^{\frac{\gamma-\alpha}{2}} - \varepsilon^{\frac{\alpha-\gamma}{2}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{p}{r} + 1 = \cos\mathrm{C} + \cos\mathrm{B} + \cos\mathrm{A}.$$

Il est facile de reconnaître que $r\cos\mathrm{C}$ est la distance de R au côté AB; nous le démontrerons en observant que $r\left(\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} + \varepsilon^{\frac{\beta-\alpha}{2}}\right)$ ne diffère qu'en direction de

$$r(\varepsilon^{\alpha} + \varepsilon^{\beta}) \triangleq \mathrm{RA} + \mathrm{RB},$$

laquelle expression, à cause de $\text{gr.}\mathrm{RA} = \text{gr.}\mathrm{RB}$, est double de cette distance.

Nous avons, en outre,

$$\frac{2p}{r} - 1 \stackrel{\frown}{=} -\left(\varepsilon^{\frac{\alpha+\beta}{2}} + \varepsilon^{\frac{\beta+\gamma}{2}} - \varepsilon^{\frac{\gamma+\alpha}{2}}\right)\left(\varepsilon^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} + \varepsilon^{-\frac{\beta+\gamma}{2}} - \varepsilon^{-\frac{\gamma+\alpha}{2}}\right)$$

$$\stackrel{\frown}{=} -\frac{1}{r^2}\,\mathrm{RP}\ \mathrm{cj}.\mathrm{RP}.$$

Par suite, *la somme des rayons* r, p *des cercles circonscrit et inscrit est égale* (104) *à la demi-somme des distances des sommets du triangle au point de rencontre* H *des trois hauteurs, et la distance* RP *de leurs centres est moyenne proportionnelle entre* r *et* $r - 2p$.

(*A suivre.*)