Nouvelles annales de mathématiques

Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 49-55

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__49_0>

BIBLIOGRAPHIE.

Cours de Calcul infinitésimal, professé à la Faculté des Sciences de Bordeaux, par *J. Hoüel*, 1871-1872; deux Parties, in-4°, de 376-336 pages, lithographiées. Prix : 20 fr. (La seconde Partie se vend séparément : 10 fr.)

Le plan général de cet Ouvrage s'écarte en quelques points du plan adopté dans la plupart des Traités d'Analyse. L'auteur a renoncé à la division ordinaire du Calcul infinitésimal en Calcul différentiel et Calcul intégral. Cette division n'a pas pour raison le degré de difficulté de ces deux branches, les commencements du Calcul intégral étant beaucoup plus faciles que certaines applications du Calcul différentiel. En séparant les deux opérations, inverses l'une de l'autre, la différentiation et l'intégration on s'interdit de nombreuses et notables simplifications dans l'établissement des propositions fondamentales, et l'on se condamne à scinder certaines théories, qui se rattachent naturellement à l'objet du Calcul différentiel, mais dans lesquelles l'usage de l'intégration est nécessaire.

Le caractère dominant de ce Cours, c'est le soin avec lequel l'auteur a développé tout ce qui touche aux fondements de la méthode infinitésimale. Bien que la légitimité et la rigueur de cette méthode eussent été mises hors de doute depuis longtemps par les travaux de Carnot, de Cauchy, de Duhamel, il semble cependant que beaucoup de Traités classiques ne l'emploient qu'avec timidité, en changeant sa dénomination en celle de *méthode des limites;* comme si ces deux méthodes ne découlaient pas des mêmes principes, et différaient autrement que par des détails de forme. Convaincu, par son expérience de l'enseignement, de la nécessité d'aborder franchement les difficultés apparentes, et de se rapprocher autant que possible, dans les développements théoriques, de la voie indiquée tant par l'instinct universel que par la pratique, l'auteur a pris pour point de départ le mode d'exposition suivi par M. Duhamel dans la première édition de son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (1840-1841). Il lui a paru peu naturel de commencer par définir la différentielle d'une fonction comme une partie seulement de l'accroissement infiniment petit de cette fonction, cette conception artificielle pouvant jeter quelque obscurité sur certains points, par exemple, sur la définition des différentielles totales des divers ordres d'une fonction de plusieurs variables, sur la question du changement de la variable indépendante, etc. On ne tarde pas, du reste, à reconnaître que les deux points de vue sont identiques, à la forme près; mais l'on n'a plus à craindre la confusion entre l'*infiniment petit* et le *très-petit*, que l'emploi de deux lettres, d et Δ, pour désigner successivement les mêmes accroissements, peut faire naître dans certains esprits. Si l'on évite, au début, de traiter à fond certaines questions réputées délicates, les difficultés devant lesquelles on a d'abord reculé se représentent inévitablement plus tard, dans des cas où la complication du sujet rend leur solution difficile. C'est là la source de tous les paradoxes qui embarrassent encore tant de bons esprits. En s'habituant dès le commencement à l'emploi du langage de la méthode infinitésimale, auquel on est forcé tôt ou tard de recourir dans les applications, comme l'auteur de la *Mécanique analytique* en a lui-même donné l'exemple, on n'est pas exposé à mettre en suspicion la rigueur d'un mode de raisonnement dont on a appris à contrôler l'exactitude dans l'exposition des premiers principes.

Le contenu de l'Ouvrage de M. Hoüel correspond à peu près au programme de la licence ès Sciences mathématiques, sauf l'addition de quelques suppléments, qu'exigeaient les progrès récents de la Science. Voici un aperçu de la Table des matières avec l'indication des numéros des Leçons correspondantes.

PREMIÈRE PARTIE.

Introduction. — (1-6). Premières notions sur les déterminants.

Calcul infinitésimal. — (1-3). Généralités. Principe des limites. Infiniment petits, infiniment grands. Principes fondamentaux sur la substitution des infiniment petits. Dérivées. — (4-8). Différentielles des fonctions d'une ou de plusieurs variables. Intégrales définies et indéfinies. Méthodes générales de différentiation et d'intégration; application aux principales fonctions simples. — (9-12). Infiniment petits des divers ordres. Dérivées et différentielles d'ordre supérieur; leur calcul direct. Différentielles et dérivées partielles des divers ordres des fonctions de plusieurs variables. Changement de variables. — (13-16). Relations entre les accroissements des fonctions et les valeurs moyennes des dérivées. Théorèmes de Taylor et de Maclaurin; leur application au développement des fonctions en séries. Théorèmes sur les séries de puissances entières et positives. Développement en séries au moyen de l'intégration. Coefficients indéterminés. — (17). Valeurs limites dans les cas d'indétermination apparente. — (18-19). Maxima et minima des fonctions d'une ou de plusieurs variables. — (20-23). Décomposition en fractions simples et intégration des fonctions rationnelles. Irrationnelles du second degré. Formules de réduction successive des intégrales des fonctions algébriques et transcendantes. — (24-26). Remarques sur le passage des intégrales indéfinies aux intégrales définies. Différentiation et intégration sous le signe $\int$. Calcul des intégrales définies spéciales. Intégrales eulériennes. — (27-29). Tangentes et normales aux courbes planes. Asymptotes rectilignes. Longueur d'un arc de courbe. Angle de contingence; sens de la concavité. — (30-33). Courbure des courbes planes. Contacts des divers ordres; courbes osculatrices. Développées. Enveloppes. — (34-35). Tangente, plan normal, plan osculateur aux courbes dans l'espace. Plan tangent, normale, lignes de niveau et de plus grande pente des surfaces courbes. — (36-41). Théorèmes de Géométrie infinitésimale; double courbure des lignes non planes; développées. Étude d'une surface en un point donné. Rayons de courbure principaux en un point quelconque. Lignes de courbure, lignes asymptotiques, lignes géodésiques; théorème de Dupin. Applications à l'hélice et aux hélicoïdes. Contacts des lignes et des surfaces. — (42-44). Quadratures, rectifications, cubatures. Centres de gravité, moments d'inertie. — (45). Déterminants fonctionnels. Changement de variables dans les intégrales multiples.

Additions : Calcul approché des quadratures. — Série de Lagrange pour le développement des fonctions implicites.

SECONDE PARTIE.

(1). Intégration des différentielles du premier ordre à plusieurs variables indépendantes. — (2-3). Formation des équations différentielles par l'élimination des constantes arbitraires. — (4). Nouvelle démonstration du théorème, que toute équation différentielle d'ordre quelconque admet une intégrale generale. — (5-9). Principales méthodes d'intégration pour les équations différentielles du premier ordre. Application à la recherche des formules d'addition des transcendantes. Théorie du multiplicateur. Équations où la différentielle entre à un degré supérieur au premier.

Solutions singulières. Méthode de P.-H. Blanchet pour distinguer les solutions singulières des intégrales particulières. — (10). Intégration et cas d'abaissement des équations différentielles d'ordre supérieur. — (11-13). Théorie des équations différentielles linéaires. — (14-16). Équations différentielles simultanées. Intégration des équations linéaires. — (17). Équations aux différentielles totales du premier ordre et du premier degré entre trois variables. — (18-19). Formation des équations aux dérivées partielles par l'élimination des fonctions arbitraires. Équations aux dérivées partielles des principales familles de surfaces. — (20-21). Surfaces enveloppes. Formation des équations non linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. Équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes; exemples d'intégration. — (22-24). Équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. Équations non linéaires aux dérivées partielles du premier ordre, dans le cas de deux variables indépendantes. Équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre quelconque. — (25-27). Calcul des variations des intégrales simples. — (28-30). Mesure de la courbure des surfaces. Coordonnées curvilignes. Triangles géodésiques. Applications à l'ellipsoïde.

APPENDICE : ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES QUANTITÉS COMPLEXES.

(1). Théorie générale des opérations. — (2). Des quantités négatives. — (3-5). Définition des quantités complexes. Addition et soustraction. Multiplication et division, puissances entières et fractionnaires. Toute équation algébrique a une racine réelle ou complexe. Fonctions exponentielles et circulaires, logarithmes. — (6). Fonctions d'une variable complexe. Fonctions monogènes. — (7-9). Intégration le long du contour d'une aire donnée. Théorème de Cauchy. Résidus. Représentation d'une fonction synectique sous forme d'un résidu. Théorèmes de Cauchy et de Laurent sur le développement des fonctions en séries de puissances. Étude d'une fonction dans le voisinage d'un point. Indices. Décomposition d'une fonction rationnelle en fractions simples. — (10-11). Séries de Bürmann et de Lagrange. Calcul des intégrales définies. — (12). Application de la théorie des quantités complexes à la Géométrie analytique.

COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE, par M. *Émile Mathieu,* professeur à la Faculté des Sciences de Besançon. Un volume in-4; 1873. Prix : 15 francs.

La Physique mathématique est une branche de la Science qui a été créée en France, mais qui n'est presque plus cultivée dans notre pays; cela tient en grande partie à ce que ceux qui désireraient l'étudier ne trouvent pas d'ouvrages qui puissent les diriger dans leurs travaux.

M. Mathieu vient de combler cette lacune, en publiant un

Traité didactique sur les méthodes d'intégration en Physique mathématique. Ces intégrations se rencontrent dans les théories de la chaleur, de l'élasticité, de l'acoustique, de l'électricité, et les physiciens eux-mêmes sont obligés de s'appuyer sur les formules qu'on en déduit.

M. Mathieu a rangé les questions qu'il a traitées, non suivant les théories physiques auxquelles elles appartiennent, mais suivant l'ordre dans lequel elles se présentent d'après les intégrations.

La *Théorie mathématique de la Chaleur* de Poisson et, à plus forte raison, la *Théorie analytique de la Chaleur* de Fourier ne sont plus à la hauteur de la Science. Les découvertes de Lamé sur les intégrations de la Physique mathématique sont répandues dans quatre ouvrages qu'il a publiés (*); mais il n'est pas toujours revenu sur les recherches de ses prédécesseurs. Aussi, aujourd'hui, pour connaître les méthodes d'intégration en Physique mathématique, faut-il lire, outre des Mémoires détachés, l'ouvrage de Fourier, celui de Poisson et ceux de Lamé.

Le livre de M. Mathieu rend donc un service évident.

On vient, il est vrai, de faire paraître en Allemagne un ouvrage de Riemann sur le même sujet : *Méthodes d'intégration en Physique mathématique*; mais ce Livre, publié après sa mort, ne fait que reproduire les leçons du savant professeur et ne peut avoir les développements qui auraient été donnés à un Traité proprement dit.

Le Chapitre I du *Cours de Physique mathématique* de M. Mathieu traite de l'emploi des séries trigonométriques, introduites pour la première fois dans l'Analyse par la théorie de la corde vibrante; il contient l'historique complet de la corde vibrante, à la théorie de laquelle travaillèrent tous les grands géomètres de l'époque, et il montre ensuite la nouvelle importance que

---

(*) *Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes;* in-8, 1857. — *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications;* in-8, 1859. — *Leçons sur la théorie analytique de la chaleur;* in-8, 1859. — *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides;* 2e édition, in-8, 1866.

donne Fourier à ces séries, en les employant pour représenter des fonctions discontinues.

Le Chapitre II, relatif aux surfaces isothermes et aux coordonnées curvilignes, donne sur ces belles théories de Lamé tout ce qui est nécessaire pour le sujet du Livre. A la fin du Chapitre se trouve un article publié autrefois par l'auteur sur l'écoulement des liquides dans les tubes capillaires, et qui a été signalé plusieurs fois à l'Académie des Sciences par M. de Saint-Venant.

Dans le Chapitre III, l'auteur étudie l'équilibre de température des cylindres. Cette question a été traitée dans les *Leçons sur les coordonnées curvilignes* de Lamé; mais M. Mathieu y a apporté des perfectionnements en reprenant le plus souvent les questions mêmes de Lamé. C'est lui qui a reconnu le premier que les équations aux différences partielles de la Physique, mises en coordonnées curvilignes, peuvent devenir fausses sur certaines surfaces; alors les intégrations qu'on en déduit sont également fausses. Il montre comment on doit résoudre cette difficulté.

Le Chapitre IV renferme des recherches sur les équations différentielles linéaires du second ordre, utiles dans la Physique mathématique, et reproduit, avec des simplifications notables, les recherches de Sturm.

Le Chapitre V traite de la théorie du mouvement vibratoire des membranes; c'est un sujet qui a été spécialement étudié par l'auteur; il y donne avec développement la théorie du mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique qu'il avait publiée en 1868 dans le tome XIII (2e série) du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville.

Le Chapitre VI a pour objet la distribution de la chaleur dans une sphère; cette question a été traitée par Laplace et Poisson; l'auteur y ajoute peu au fond; mais l'exposition en était difficile et mérite d'être remarquée.

Le Chapitre VII traite de la distribution de la chaleur dans un milieu indéfini et des températures du globe terrestre. On y voit les principaux résultats des recherches de Laplace, Poisson, Fourier.

L'auteur y résout certains problèmes d'Analyse par des formules plus simples que celles données avant lui.

Le Chapitre VIII est relatif à l'équilibre de température de l'ellipsoïde. C'est une question qui avait été entièrement résolue par Lamé. Mais l'auteur en a changé l'exposition en usant de réflexions générales auxquelles il a été conduit par le sujet de son Livre et en profitant de recherches faites par Jacobi et par M. Liouville.

Le Chapitre IX traite du refroidissement d'un ellipsoïde planétaire. Cette question difficile appartient entièrement à l'auteur et renferme des résultats très-curieux au point de vue de l'Analyse.

M. Serret a présenté l'Ouvrage de M. Mathieu à l'Académie des Sciences, et voici les paroles qu'il a prononcées à cette occasion : « Le livre dont M. E. Mathieu a tenu à faire hommage à l'Académie tire son origine des leçons professées par l'auteur dans un cours complémentaire institué à la Sorbonne, il y a quelques années, par M. le Ministre de l'Instruction publique. M. Mathieu a pleinement justifié la confiance qui lui fut témoignée en cette occasion, et l'Ouvrage, dans lequel il publie aujourd'hui le résultat de ses études sur les méthodes d'intégration usitées dans les recherches de Physique mathématique, est appelé, sans nul doute, à rendre d'importants services aux personnes qui s'occupent de cette branche des Mathématiques appliquées. »