DELÈGUE

Nouvelle démonstration du parallélogramme des forces

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 495-500

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__495_0>

NOUVELLE DÉMONSTRATION DU PARALLÉLOGRAMME DES FORCES;

PAR M. DELÈGUE,
Professeur de Philosophie au lycée de La Rochelle.

Daniel Bernoulli (*), Laplace (**), d'Alembert, Poisson, Francœur (***) ont cherché à démontrer ce théorème fondamental de la Mécanique, sans avoir recours au principe de l'indépendance des mouvements ou à la considération de points invariablement liés entre eux dans l'espace; mais, pour y parvenir, ils ont dû employer les développements en série, suivant la formule de Taylor.

Cauchy (****), vers 1823, et Aymé, en septembre 1836 (*Journal de M. Liouville*), en ont donné une démonstration géométrique; mais ces démonstrations sont assujetties à la considération de forces n'agissant pas dans le même plan; elles ont recours à la Géométrie dans l'espace pour démontrer un théorème que la Géométrie plane peut démontrer plus simplement. C'est ce que je me propose d'établir.

J'admets comme évident ou comme pouvant être facilement démontré, dans la théorie des forces ou causes du mouvement dans la matière inerte :

1° Le principe de symétrie, dont les principales conséquences sont que deux forces égales et directement opposées se détruisent et que deux forces égales, appli-

(*) *Mémoires de Saint-Pétersbourg.*

(**) *Mécanique céleste*, t. I, chap. I.

(***) *Statique.*

(****) *Statique de Monge* (1823), Note de la fin.

quées au même point, ont une résultante dirigée suivant la bissectrice de l'angle plan formé par les deux composantes;

2° Que deux forces, de même direction, appliquées au même point, s'ajoutent, c'est-à-dire peuvent être détruites par deux autres forces égales chacune à chacune aux deux premières et directement opposées. De là résulte ce principe fondamental que : *si deux forces, appliquées au même point, varient, sans changer entre elles de rapport, ni de direction, leur résultante varie dans le même rapport, sans changer de direction* (*).

THÉORÈME DE D. BERNOULLI. — *La résultante de deux forces représentées en grandeur et en direction par deux droites rectangulaires sera représentée en grandeur par la diagonale du rectangle formé sur les deux composantes.*

Soient les deux forces P, Q rectangulaires; soit AR la direction de leur résultante, je mène la droite FF′ perpendiculaire sur AR.

(*) Appliquer en A le système des forces (2P, 2Q) revient à superposer au système (P, Q) un autre système (P, Q) identique au premier. Si donc (P, Q) a pour résultante R, la résultante totale sera 2R et de même direction que R. Une seconde superposition de (P, Q) donnera pour résultante 3R, et ainsi de suite à l'infini.

Il en sera de même pour $\left(\frac{P}{n}, \frac{Q}{n}\right)$, n étant entier; car, si ce système a pour résultante R′, en le multipliant par n, R′ deviendra nR′, sans changer de direction; mais alors les composantes, étant (P, Q), devront avoir R pour résultante; donc

$$R = nR',$$

donc

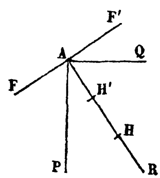
$$R' = \frac{R}{n};$$

n pouvant être aussi grand qu'on voudra, la proposition est encore vraie pour le cas où les variations proportionnelles se feront d'une manière continue.

Les angles FAP, RAQ sont égaux, comme ayant leurs côtés perpendiculaires ; il en est de même des angles PAR, F′AQ.

Donc les directions FA, AR, AP ; AP, AQ, AR ; F′A, AR, AQ constituent trois faisceaux superposables.

Fig. 1.



Cela posé, j'observe que, de même que AR peut être décomposée en deux forces P et Q de grandeur et de direction données, P peut aussi être décomposée en deux forces rectangulaires H, F, dirigées suivant AR et AF, puisque AF et AR sont dirigées, par rapport à AP, comme AP et AQ le sont par rapport à AR. De plus, en vertu du deuxième axiome, ces deux forces F, H seront proportionnelles à Q, P, et autant de fois plus grandes ou plus petites que Q, P, que P est plus grand ou plus petit que la résultante inconnue R, c'est-à-dire que l'on aura les deux égalités :

$$\frac{F}{H} = \frac{Q}{P}, \quad \frac{F}{Q} = \frac{P}{R}.$$

Il en est de même pour Q ; soient H′ et F′ les deux composantes de Q.

Nous aurons donc les égalités

$$F = Q \times \frac{P}{R}, \quad F' = P \times \frac{Q}{R},$$

$$H = P \times \frac{P}{R}, \quad H' = Q \times \frac{Q}{R};$$

donc $F = F'$. Mais ces deux forces directement opposées se détruisent; la résultante totale est donc

$$H + H' = R.$$

Remplaçant H et H' par leurs valeurs, nous aurons

$$R = \frac{P^2}{R} + \frac{Q^2}{R};$$

donc

$$R^2 = P^2 + Q^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème II. — *La résultante de deux forces rectangulaires, appliquées à un même point A, est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du rectangle construit sur les composantes.*

Soient deux droites indéfinies AH, QH' perpendiculaires sur AQ. Je prends sur QH' les longueurs

$$QR = AQ, \quad RR' = AR, \quad R'R'' = AR', \ldots,$$

je mène les diagonales AR, AR', AR'',...; ces diagonales seront bissectrices des angles PAQ, PAR, PAR',....

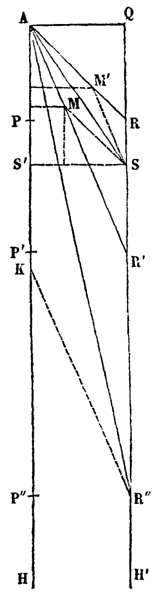
D'après le théorème de Bernoulli, elles représentent *en grandeur* la résultante de deux forces rectangulaires, l'une Q, constante, représentée par AQ, l'autre P, variable, dirigée suivant AH, et successivement représentée en grandeur par $QR = AP$, $QR' = AP'$, $QR'' = AP''$.

Je dis, de plus, que ces diagonales représentent aussi cette résultante *en direction*.

1° La proposition est évidente pour AR, puisque dans ce cas les deux composantes sont égales et que AR est bissectrice de l'angle PAQ.

Il en est de même pour AR', puisque, les forces AP, AQ se composant en AR, le point A peut être considéré comme sollicité par deux forces égales, savoir : AR, PP', dont la résultante aura pour direction AR', bissectrice de l'angle PAR; AR′ sera donc à la fois et la résultante du système (AP′, AQ) et celle du système des deux

Fig. 2.



forces égales et obliques AR, PP′ appliquées au point A et représentées par les côtés du losange dont AR′ est la diagonale et l'angle aigu PAR. La même démonstration s'applique à la diagonale AR″.

2° Il en est de même pour AS, bissectrice de l'angle RAR′ = R′AP.

Car, si l'on construit le losange AM′SM semblable au losange AR′R″K et si l'on mène SS′ perpendiculaire sur AP, on voit que la force AS est équivalente au système des forces (AM, AM′); car il a été démontré que AR″ était équivalente au système (AR′, AK).

32.

Mais le système (AM, AM′) est équivalent au système (AQ, AS′) ; car les projections de AS sur AP et AQ sont égales à la somme des projections semblables des droites AM, AM′ sur les mêmes axes rectangulaires. De plus, ce qui précède démontre que toute force suivant AM et AM′ peut être décomposée en deux forces rectangulaires, représentées par les projections sur AQ et AP des droites qui représentent en grandeur cette force.

Donc AS est la résultante des forces rectangulaires AS′, AQ, formant les côtés du rectangle dont AS est la diagonale.

On peut d'ailleurs étendre cette démonstration à toute autre diagonale bissectrice des angles formés par les premières à l'infini. Donc le théorème énoncé est vrai pour toute espèce de rectangle.

Il peut s'étendre aussi à toute espèce de losange : la seule inspection de la figure le démontre.

Il s'étend aussi facilement à toute espèce de parallélogramme ; car, dans le parallélogramme, les projections de la diagonale sur deux axes rectangulaires sont aussi égales à la somme des projections des deux côtés qui se coupent sur la diagonale.

Donc, en général, la diagonale d'un parallélogramme représente, en grandeur et en direction, la résultante des deux forces représentées par les deux droites qui se coupent sur la diagonale. C. Q. F. D.