NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V. LIGUINE

Sur quelques propriétés géométriques du déplacement d'une figure plane dans son plan

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 481-494

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__481_0>

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DU DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE PLANE DANS SON PLAN;

PAR M. V. LIGUINE,
Professeur à l'Université d'Odessa.

Le théorème qui sert de base à toute la théorie géométrique du mouvement d'une figure plane, invariable dans son plan, est celui-ci :

Quand une figure plane invariable se déplace d'une manière quelconque dans son plan, il existe toujours dans ce plan un point qui, étant considéré comme lié invariablement à la figure mobile, reste fixe pendant le déplacement de la figure, de manière que tout déplacement d'une figure plane, invariable dans son plan, peut être produit par une simple rotation de la figure autour de ce point.

Ce théorème, connu déjà par Descartes et Jean Bernoulli pour quelques cas particuliers, a été énoncé pour la première fois, sous une forme complétement générale et purement géométrique, par M. Chasles, en 1830 (*). Il a été généralisé par le même illustre savant pour le cas d'une figure qui change de forme en restant toujours semblable à elle-même (**).

Les lois géométriques du déplacement d'une figure invariable ne sont que des conséquences des propriétés dont jouit un système de deux figures égales et superposables; de même les lois géométriques du déplacement

(*) Voir *Bulletin des Sciences mathématiques* de Férussac, t. XIV, p. 321, ou *Correspondance mathématique et physique de l'Observatoire de Bruxelles*, publiée par Quetelet, t. VII, p. 353.

(**) *Loc. cit.*

d'une figure qui se déforme en restant semblable à elle-même découlent des propriétés relatives à un système de deux figures semblables placées d'une manière quelconque l'une par rapport à l'autre. Mais la Géométrie moderne connaît un mode plus général de corrélation des figures dont l'égalité et la similitude ne sont que des cas très-particuliers : c'est l'homographie; et l'on peut se demander quelles sont les lois géométriques du déplacement d'une figure qui varie de forme en restant continuellement homographique à elle-même, lois qui doivent être comprises dans les propriétés d'un système de deux figures homographiques.

Je me propose, dans cette Note, d'étudier quelques propriétés purement géométriques du mouvement d'une figure plane qui, en se déplaçant dans son plan, se déforme en même temps continuellement suivant la loi de l'homographie, et de faire voir comment se déduisent de ces propriétés, comme cas particuliers, les deux théorèmes fondamentaux cités de M. Chasles sur les déplacements des figures planes invariables et variables suivant la loi de la similitude.

Dans son *Rapport sur les progrès de la Géométrie* (*), M. Chasles fait mention de ses propres recherches sur cette question, dont les résultats ont fait l'objet d'une partie d'un Cours qu'il avait professé à la Faculté des Sciences de Paris, mais qui n'ont pas été publiées jusqu'à présent. Cette remarque et l'admirable profondeur qui caractérise tous les travaux de son auteur mettent tout à fait hors de doute que le célèbre géomètre avait, entre autres, trouvé depuis longtemps non-seulement toutes les propriétés exposées dans cette Note, mais aussi une multitude d'autres, probablement beaucoup plus impor-

(*) Page 281.

tantes, relatives et au déplacement dans le plan et au déplacement dans l'espace. Néanmoins, dans la littérature de la science, la question sur les mouvements géométriques des figures variables de forme, suivant la loi de l'homographie, est restée inabordée (*); et ce n'est que par cette seule raison que j'ose publier ces quelques résultats bien modestes de mes propres recherches, tout en invoquant la bienveillante indulgence de l'éminent professeur de la Faculté de Paris.

Pour abréger le langage, je désignerai, dans ce qui va suivre, par figure *homographiquement variable*, une figure qui se déforme en restant continuellement homographique à elle-même, et par figure *semblablement variable* une figure continuellement variable de forme, suivant la loi de la similitude.

§ I.

Quand une figure plane *homographiquement variable* Σ se déplace suivant une loi déterminée dans son plan, deux positions quelconques Σ', Σ'' d'un pareil système mobile et variable représentent deux figures homographiques *correspondantes*, c'est-à-dire telles que, si l'on considère dans ces deux figures deux points homologues O', O'' et les deux faisceaux de droites homologues a', b', c',..., a'', b'', c'',... passant par ces

(*) Le récent et beau Mémoire de M. Durrande, inséré dans les *Annales de l'École Normale supérieure* pour 1873, traite la question sur le déplacement d'une figure variable de forme suivant la loi de l'homographie, mais pas sous le point de vue purement géométrique dont il s'agit ici; il est exclusivement consacré aux questions plus élevées sur les vitesses et les accélérations des points de la figure mobile. Il en est de même du Mémoire de M. Picart, inséré dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XII.

points, deux droites homologues a', a'', pour décrire simultanément deux angles homologues $(a'b')$, $(a''b'')$, doivent tourner dans le *même* sens autour des deux points O′, O″.

Mais on sait que deux figures planes homographiques correspondantes, situées dans le même plan, jouissent des propriétés suivantes, dues à M. Chasles (*) :

a) *Il existe, en général, dans le plan des deux figures, trois points qui, étant considérés comme appartenant à la première figure, sont eux-mêmes leurs homologues dans la seconde figure; deux de ces trois* points doubles *peuvent être imaginaires, mais le troisième est toujours réel.*

b) *Il existe, en général, dans le plan des deux figures, trois droites qui, étant considérées comme appartenant à la première figure, sont elles-mêmes leurs homologues dans la seconde figure; deux de ces trois* droites doubles *peuvent être imaginaires, mais la troisième est toujours réelle.*

c) *Quand deux des trois points doubles sont imaginaires, deux des trois droites doubles sont aussi imaginaires, c'est-à-dire que, quand il n'existe qu'un seul point double réel, il n'existe qu'une seule droite double réelle, et cette droite double réelle est celle sur laquelle sont situés les deux points doubles imaginaires.*

Il est évident, en outre, que le nombre des points doubles imaginaires et des droites doubles imaginaires doit nécessairement être égal à 0 *ou à* 2, *et ne peut jamais être égal à* 1.

D'après ce qui a été dit plus haut, les théorèmes *a*), *b*), *c*) sont immédiatement applicables aux deux posi-

(*) Voir *Géométrie supérieure*, p. 403-405.

tions Σ', Σ'' de la figure mobile et homographiquement variable Σ. On a donc ainsi les propriétés géométriques suivantes du déplacement de Σ :

I. *Quand une figure plane se meut d'une manière quelconque dans son plan et varie en même temps continuellement de forme en restant toujours homographique à elle-même, il existe dans le plan trois points et trois droites, ou un point et une droite, qui, étant considérés comme appartenant à la figure mobile, ne changent pas de position pendant le déplacement.*

En d'autres termes :

II. *Quand une figure plane homographiquement variable se meut d'une manière quelconque dans son plan, tout déplacement d'une première position donnée en une seconde position donnée est équivalent à un mouvement de la figure dans lequel trois points et trois droites, ou un point et une droite de la figure, restent fixes pendant le déplacement considéré.*

Le terme *équivalent* exprime ici que, en réalité, le déplacement de la figure de la première position donnée dans la seconde position peut s'effectuer d'une manière tout à fait différente; mais que ce déplacement peut être produit par un mouvement tel, que trois points et trois droites, ou un point et une droite de la figure, restent fixes. La cinématique des systèmes invariables fournit beaucoup d'exemples de l'importance et de l'utilité des lois de l'équivalence des mouvements.

Pour se former une idée du mouvement réel de la figure, il faut, suivant un procédé bien connu, appliquer le théorème général II au cas d'un déplacement infiniment petit, et se figurer le mouvement fini considéré comme composé d'une infinité de ces déplacements infiniment petits successifs. On conclura alors :

III. *A chaque instant du mouvement d'une figure plane homographiquement variable dans son plan, trois ou un de ses points restent en repos; ces trois points, ou ce point unique, changent d'une position de la figure à l'autre et forment, par leur ensemble dans le plan de la figure, trois courbes ou une courbe, qui sont les lieux géométriques de ces points fixes, de manière que, à chaque instant, le mouvement de trois ou d'un des points de la figure, qui sont amenés respectivement sur ces courbes, s'interrompe pour un intervalle de temps infiniment court.*

A chaque instant, trois ou une des droites de la figure sont en repos, de manière que leurs points ne se déplacent que sur ces droites; sur chacune de ces droites, s'il en existe trois, est situé un des trois points fixes, et s'il n'existe qu'une seule droite immobile, elle ne contient aucun point fixe.

De plus, en observant que deux faisceaux homographiques correspondants de droites et deux systèmes homographiques correspondants de points peuvent donner lieu à la génération d'une section conique quelconque, il est facile de voir que les droites homologues et les *cordes* (*) relatives à deux positions de la figure Σ, dont nous étudions le déplacement, jouissent des propriétés suivantes :

IV. *Si l'on prend deux points homologues de deux positions déterminées d'une figure plane homographiquement variable mobile d'une manière quelconque dans son plan, les points d'intersection respectifs de*

(*) Nous entendons par *corde* la droite qui joint deux points homologues de deux positions Σ', Σ'' de la figure mobile Σ par extension de la signification attribuée à ce terme par M. Chasles dans la théorie des déplacements géométriques d'un système invariable.

toutes les droites qui passent par l'un de ces points avec les droites homologues passant par le second point seront tous situés sur une même conique, contenant les deux points considérés et tangente à la droite homologue de celle qui joint ces deux points.

V. *Si l'on considère deux droites homologues de deux positions d'une figure plane homographiquement variable, mobile d'une manière quelconque dans son plan, et que l'on prenne deux séries de points homologues sur ces droites, les cordes qui joignent ces points deux à deux envelopperont une conique tangente aux deux droites considérées.*

§ II.

Passons au cas du déplacement d'une figure plane *semblablement variable* dans son plan, et voyons ce que deviennent les résultats trouvés dans le § I pour ce cas particulier.

Deux figures sont semblables entre elles quand l'angle entre deux droites quelconques de l'une des figures est égal à l'angle entre les droites homologues de l'autre figure, et les distances homologues dans les deux figures sont entre elles dans un rapport constant.

Deux figures planes semblables représentent un cas particulier d'un système de deux figures planes homographiques, savoir : celui où, dans l'une des dernières, la droite homologue à la droite infiniment éloignée de l'autre figure est elle-même située à l'infini, de manière que deux figures planes semblables peuvent être considérées comme deux figures planes homographiques dont une droite double réelle se trouve à l'infini.

En vertu de ces propriétés particulières, les lois géométriques exprimées par les théorèmes *a*), *b*), *c*) du paragraphe précédent se modifient pour le cas des figures semblables. Commençons par faire voir en quoi consistent ces modifications.

En premier lieu, je dis que le nombre des points doubles réels de deux figures planes semblables et correspondantes, situées dans un même plan, est toujours égal à 1 et ne peut jamais être égal à 3. Soient O', O'' deux points homologues de ces deux figures; menons par O' une série de droites et par O'' une seconde série de droites homologues aux premières; les deux faisceaux ainsi obtenus jouiront des propriétés suivantes : 1° ils seront correspondants; 2° tous les angles de l'un des faisceaux seront respectivement égaux aux angles homologues de l'autre; mais il est aisé de s'assurer que le lieu géométrique de tous les points d'intersection des droites homologues appartenant aux deux faisceaux ainsi définis est un cercle. En effet, d'une part, ce lieu doit nécessairement être une courbe du second degré passant par les points O' et O''; d'autre part, dans le cas actuel, les mêmes arcs de cette courbe sous-tendent des angles homologues égaux dont les sommets sont situés en O' et O'', c'est-à-dire sur la courbe elle-même, et il n'y a que le cercle qui peut jouir de cette propriété. Mais il suit du raisonnement qui conduit au théorème *a*) du § I que les points doubles de deux figures planes homographiques correspondantes sont trois des quatre points d'intersection des deux coniques qu'on obtient par la considération de deux couples de faisceaux homologues; par suite, les points doubles de deux figures semblables correspondantes seront les points d'intersection de deux cercles; mais, deux cercles ne se coupant qu'en deux points réels et l'un de ces points étant, comme dans le cas général de deux figures homographiques, le point d'intersection de deux droites homologues qui joignent deux à deux les centres des deux couples de faisceaux considérés, on voit que le second des deux points commun aux deux cercles sera le seul point double réel des deux figures semblables; de plus, les deux cercles ayant, en général, des rayons finis, le seul point double sera situé à distance finie des deux figures, si les dimensions de ces dernières ne sont pas infinies. Ainsi deux des trois points doubles d'un système de deux figures planes homographiques et correspondantes seront, dans le cas particulier considéré, toujours imaginaires, et le troisième sera toujours réel; d'où il suit immédiatement, en vertu de la propriété c) du § I, que, dans deux figures semblables et correspondantes, deux des trois droites doubles sont toujours imaginaires et une est toujours réelle, et cette seule droite double réelle doit, en vertu de la propriété caractéristique même des figures semblables, être située à l'infini.

Les théorèmes a) et b) du paragraphe précédent se transforment donc, pour le cas actuel, en ceux-ci :

a') Quand deux figures planes semblables et correspondantes sont placées d'une manière quelconque dans un plan, il existe dans ce plan un point réel qui, étant considéré comme appartenant à l'une des figures, est lui-même son homologue dans l'autre figure; ce point est situé à distance finie si les dimensions des deux figures ne sont pas infinies.

b') Quand deux figures planes semblables et correspondantes sont placées d'une manière quelconque dans un plan, il existe dans ce plan une droite réelle qui, étant considérée comme appartenant à l'une des figures, est elle-même son homologue dans l'autre figure; cette droite double unique se trouve toujours à l'infini.

La droite double, étant située à l'infini, n'offre aucun intérêt pour le genre de recherches qui nous occupe; mais le point double jouit de propriétés particulières importantes au point de vue cinématique. Premièrement on peut toujours le considérer comme situé à distance finie; car, en général, il ne sera question que de figures de dimensions finies. Soit (ω', ω'') ce point double; prenons trois points quelconques A', B', C' de la première figure situés sur une même droite avec le point ω', et les points homologues A'', B'', C'' dans la seconde figure; la fonction anharmonique des quatre points A', B', C', ω' doit être égale à la fonction anharmonique des quatre points A'', B'', C'', ω''. Ainsi

$$\frac{A'C'}{C'B'} : \frac{A'\omega'}{\omega'B'} = \frac{A''C''}{C''B''} : \frac{A''\omega''}{\omega''B''};$$

mais, les deux figures étant semblables entre elles, les rapports $\frac{A'C'}{C'B'}$ et $\frac{A''C''}{C''B''}$ sont égaux; donc

$$\frac{A'\omega'}{\omega'B'} = \frac{A''\omega''}{\omega''B''},$$

ou bien, comme les deux points ω', ω'' coïncident en un seul, on aura

$$\frac{A'\omega'}{A''\omega'} = \frac{B'\omega'}{B''\omega'}.$$

Cette proportion exprime que les distances entre le point double et deux points homologues quelconques des deux figures sont entre elles dans un rapport constant, qui est évidemment égal au rapport de deux segments homologues quelconques; d'ailleurs on peut encore vérifier cette propriété immédiatement en considérant le point double comme appartenant à l'une des figures. En outre, les deux figures étant supposées correspondantes, il est clair que, par une rotation d'une d'elles autour du point double, on pourra les amener dans une position relative telle, que toutes les lignes de l'une deviendront respectivement parallèles aux lignes homologues de l'autre; alors les deux figures seront placées semblablement (homothétiques), et leur point double sera leur centre de similitude.

La proposition a') et les propriétés du point double de deux figures planes semblables et correspondantes que nous venons d'exposer ont été énoncées pour la première fois, sans démonstration, par M. Chasles (*).

Soient maintenant Σ une figure plane semblablement variable, mobile d'une manière quelconque dans son plan, et Σ', Σ'' deux positions déterminées de cette figure; en appliquant aux figures Σ', Σ'' la proposition a'), on conclut :

I. *Quand une figure plane semblablement variable se déplace d'une manière quelconque dans son plan, il existe toujours dans ce plan un point qui, étant considéré comme appartenant à la figure mobile, ne change pas de position pendant le déplacement.*

Donc :

II. *Tout déplacement d'une figure plane semblablement variable dans son plan est équivalent à une rotation de la figure autour d'un certain point du plan et une déformation (contraction ou dilatation) simultanée de la figure s'effectuant suivant la loi de la similitude.*

Pour construire ce centre de rotation quand on se donne deux positions Σ', Σ'' de la figure mobile, il suffit de placer la figure Σ'', sans en altérer la forme, semblablement (homothétiquement) par rapport à Σ', et de déterminer ensuite le centre de similitude des deux figures;

(*) Voir *Bulletin de Férussac*, loc. cit.

ce centre sera le point cherché. Un second mode de construction découle de la propriété, mentionnée plus haut, des points doubles de deux figures semblables : ayant choisi deux couples de points homologues quelconques O', O'' et P', P'' dans les deux figures Σ', Σ'', et deux couples de droites homologues a', a'' et b', b'' passant respectivement par ces points, construisons le point d'intersection A des droites a', a'' et le point d'intersection B des droites b', b''; menons par les points O', O'', A une circonférence, par P', P'', B une seconde circonférence; l'un des points d'intersection de ces deux circonférences sera le point de rencontre des droites $O'P'$ et $O''P''$, et l'autre sera le point cherché.

Pour un déplacement infiniment petit, le théorème II peut être énoncé ainsi :

III. *A chaque instant du mouvement d'une figure plane semblablement variable dans son plan, un des points de la figure reste fixe, et la figure tourne autour de ce point* (*) *et se déforme infiniment peu en restant semblable à elle-même.*

En considérant un déplacement fini déterminé de Σ comme composé d'une infinité de ces déplacements élémentaires successifs, on peut se former une idée du mouvement réel d'une figure plane semblablement variable dans son plan.

Enfin les droites homologues de deux positions quelconques Σ', Σ'' de la figure Σ et les cordes qui joignent les points homologues de Σ', Σ'' jouissent des propriétés suivantes :

(*) On pourrait nommer ce point *pôle de rotation*, comme l'a proposé M. Wiener pour un cas particulier du mouvement d'une figure plane semblablement variable dans son plan, dans un Mémoire inséré dans les *Annali di Matematica* de M. Cremona, série II, t. I, p. 141-142.

IV. *Si l'on prend deux points homologues quelconques de deux positions déterminées d'une figure plane semblablement variable mobile dans son plan, le lieu géométrique des points d'intersection respectifs de toutes les droites qui passent par l'un de ces points avec les droites homologues passant par le second point sera un cercle; ce cercle passera par les deux points donnés et sera tangent à la droite homologue de celle qui joint ces deux points.*

V. *Si l'on prend, dans deux positions déterminées d'une figure plane semblablement variable mobile dans son plan, deux droites homologues quelconques et deux séries de points homologues sur ces droites, les cordes qui joignent deux à deux ces points homologues envelopperont une parabole qui est tangente aux deux droites.*

La première de ces deux propositions découle immédiatement de ce qui a été dit plus haut sur les faisceaux homologues de droites faisant partie de deux figures planes semblables et correspondantes; la seconde est une conséquence d'une propriété connue des divisions anharmoniques semblables et correspondantes.

§ III.

Il nous reste à montrer ce que deviennent les résultats généraux du § I dans le cas le plus simple, celui où la figure plane mobile dans son plan est *invariable* de forme. Ce cas conduit à la considération de deux figures égales et superposables situées dans un même plan.

Deux figures égales et superposables représentent ce cas particulier de deux figures semblables et correspondantes, quand, dans ces dernières, non-seulement les angles homologues, mais aussi tous les segments homologues sont égaux entre eux.

Afin d'éviter d'inutiles répétitions pour ce cas particulier, il suffit de remarquer que toutes les propriétés de deux figures semblables qui dépendent seulement des rapports d'angles homologues et ne dépendent point des rapports entre les distances homologues doivent aussi s'appliquer aux figures égales et superposables. Il suit de là que les théorèmes a'), b'), I, IV, V du paragraphe précédent subsistent encore pour le cas actuel, en y remplaçant seulement les termes *semblables* et *semblablement variable* par *invariable;* mais les propriétés du point double, dépendant des rapports de longueurs homologues, et les propositions II et III du § II, qui en découlent, se modifient ainsi : le point double de deux figures égales et superposables sera équidistant de deux points homologues quelconques; la proposition II se transforme en ce théorème de M. Chasles que nous avions énoncé au commencement de la Note, et la proposition III en cet autre théorème bien connu, qui exprime que tout mouvement infiniment petit d'une figure plane invariable dans son plan est une rotation autour d'un point de la figure qui reste fixe pendant l'instant considéré, et que l'on nomme *centre instantané de rotation.*

On obtient ainsi les propriétés géométriques connues et fondamentales du déplacement plan des figures planes semblablement variables et invariables comme des cas particuliers du théorème I, § I, relatif au déplacement fini d'une figure plane homographiquement variable dans son plan.