Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 437-480
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__437_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 526

(voir 1^re série, t. XIX, p. 234),

PAR M. C. MOREAU,
Capitaine d'Artillerie, à Constantine.

Si l'équation

$$a x^4 + 4 b x^3 + 6 c x^2 + 4 d x + e = 0$$

a une racine double α, *posons*

$$M = \frac{(ae - 4bd + 3c^2)^3}{(ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3)^2} = \frac{I^3}{J^2}.$$

Démontrer les équations suivantes :

$$\alpha = 4\frac{\frac{dM}{da}}{\frac{dM}{db}} = \frac{3}{2}\frac{\frac{dM}{db}}{\frac{dM}{dc}} = \frac{2}{3}\frac{\frac{dM}{dc}}{\frac{dM}{dd}} = \frac{1}{4}\frac{\frac{dM}{dd}}{\frac{dM}{de}}.$$

(Michael Roberts.)

Soient

$$f(a, b, c, d, e, x) = 0$$

l'équation proposée, et

$$F(a, b, c, d, e) = I^3 - 27J^2 = 0$$

la condition pour que deux racines de cette équation soient égales ; différentions ces deux équations, on a

$$f'_a da + f'_b db + f'_c dc + f'_d dd + f'_e de + f'_x dx = 0,$$

et

$$F'_a da + F'_b db + F'_c dc + F'\ dd + F'_e de = 0.$$

Si x devient égal à la racine double α, f'_x s'annule et la première des deux équations précédentes devient

$$\alpha^4 da + 4\alpha^3 db + 6\alpha^2 dc + 4\alpha dd + de = 0.$$

Supposant alors successivement c, d, e ou d, e, a, ou e, a, b, ou a, b, c constants à la fois, les différentielles correspondantes s'annulent et on a les quatre systèmes suivants :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{ll} \alpha^4 da + 4\alpha^3 db = 0, & F'_a da + F'_b db = 0, \\ 4\alpha^3 db + 6\alpha^2 dc = 0, & F'_b db + F'_c dc = 0, \\ 6\alpha^2 dc + 4\alpha dd = 0, & F'_c dc + F'_d dd = 0, \\ 4\alpha dd + \quad de \quad = 0, & F'_d dd + F'_e de = 0, \end{array}\right.$$

qui donnent, pour α,

$$\alpha = 4\frac{F'_a}{F'_b} = \frac{3}{2}\frac{F'_b}{F'_c} = \frac{2}{3}\frac{F'_c}{F'_d} = \frac{1}{4}\frac{F'_d}{F'_e}.$$

Or

$$M = \frac{I^3}{J^2} = 27 + \frac{I^3 - 27J^2}{J^2} = 27 + \frac{F(a, b, \ldots)}{J^2},$$

$$\frac{dM}{da} = \frac{J^2 F'_a - 2J \frac{dJ}{da} F(a, b, \ldots)}{J^4} = \frac{F'_a}{J^2};$$

cela montre que les dérivées partielles des fonctions F et M sont proportionnelles et que, la valeur trouvée pour la racine double ne contenant que leurs rapports, on peut y remplacer ces dérivées les unes par les autres. On aura donc enfin

$$\alpha = 4 \frac{\frac{dM}{da}}{\frac{dM}{db}} = \frac{3}{2} \frac{\frac{dM}{db}}{\frac{dM}{dc}} = \frac{2}{3} \frac{\frac{dM}{dc}}{\frac{dM}{dd}} = \frac{1}{4} \frac{\frac{dM}{dd}}{\frac{dM}{de}}.$$

Les raisonnements qui ont servi à établir les relations (1) ne sont nullement particuliers à l'équation du quatrième degré et ils sont facilement applicables à une équation de degré quelconque, ayant un ou plusieurs couples de racines égales.

Note. — La même question a été résolue par M. Brocard.

Question 56

(voir 1re série; t. I, p. 521);

PAR M. H. BROCARD.

THÉORÈME. — *Étant donné un système de lignes droites situées dans l'espace d'une manière quelconque, on peut mener une infinité de plans dont chacun coupe toutes ces droites.*

Par un point fixe quelconque, menons des parallèles aux droites données; elles détermineront un cône C d'un certain degré.

Si l'on considère une droite renfermée à l'intérieur de la nappe du cône C et partant de son sommet, il est évident que, n'étant parallèle à aucune des génératrices de ce cône, tout plan perpendiculaire à cette droite rencontrera ces génératrices et, par suite, les droites du système donné, qui leur sont parallèles.

La région extérieure au cône C renfermera une infinité de directions de normales à des plans répondant à la question; mais, par exception, quelques-uns de ces plans pourraient être parallèles à des droites du système donné.

Question 972

(voir 2e série, t. VIII, p. 562);

PAR M. GALLOIS.

Reconnaître les différentes surfaces représentées par l'équation

$$a\frac{y+z}{x}+b\frac{x+z}{y}+1=0,$$

quand a *et* b *prennent toutes les valeurs possibles.*

Trouver le lieu des centres de ces différentes surfaces.

Indiquer les particularités relatives aux axes de coordonnées, aux sections planes.

Peut-il y avoir des sections circulaires?

Les surfaces peuvent-elles être de révolution?

Montrer que leur enveloppe est une surface du second ordre, lorsque le produit ab *est constant.*

Je mets l'équation sous forme entière, et je suppose que a et b ne sont jamais nuls à la fois. L'équation, sous sa nouvelle forme, est

$$(1)\qquad bx^2+ay^2+ayz+bzx+xy=0;$$

quels que soient a et b, les surfaces représentées par cette équation sont à centre, et, de plus, l'origine des coordonnées est à la fois un point et un centre de ces surfaces. Cette équation ne peut donc représenter que des cônes ou des variétés du cône.

Considérons les équations du centre

$$\begin{aligned} 2bx + y + bz &= 0, \\ x + 2ay + az &= 0, \\ bx + ay &= 0. \end{aligned}$$

Si le déterminant de ces trois équations est différent de zéro, c'est-à-dire si l'on a $2ab(1-b-a) \gtrless 0$, les surfaces représentées par l'équation (1) sont à centre unique, et, par suite, ne peuvent être que des cônes; je démontrerai plus loin qu'ils sont toujours réels.

Si le déterminant est nul, c'est-à-dire si l'on a $2ab(1-b-a) = 0$, les surfaces représentées par l'équation (1) ne peuvent être que des plans : je dis d'abord que ces plans se couperont toujours; car, si l'on considère les équations du centre, on voit que si a et b ont des valeurs finies et différentes de zéro, la dernière équation ne peut se réduire avec aucune des deux premières, puisque son coefficient en z est nul; d'un autre côté, la même conséquence a lieu si une des valeurs, a par exemple, est finie (ou nulle) et l'autre b infinie. Si l'on suppose en même temps $a = \infty$, $b = \infty$, alors les deux premières équations deviennent $2x + z = 0$, $2y + z = 0$ et sont distinctes. Les équations du centre ne pouvant se réduire à moins de deux, on a donc toujours, quand $2ab(1-b-a) = 0$, deux plans qui se coupent, qui sont aussi toujours réels, comme nous le verrons plus loin. Ainsi, dans le cas général, l'équation proposée représentera des cônes, et, dans les cas particuliers où l'on aurait, ou $a = 0$, ou $b = 0$, ou $a + b = 1$, elle représentera des plans qui se coupent.

Pour trouver le lieu des centres de ces différentes surfaces, il suffit d'éliminer a et b entre les trois équations du centre; des deux premières, on tire $b = -\frac{y}{2x+z}$, $a = -\frac{x}{2y+z}$, et, remplaçant dans la troisième, il vient, pour l'équation du lieu cherché,

$$xy\left(\frac{1}{2x+z}+\frac{1}{2y+z}\right)=0.$$

Le lieu se compose donc de l'ensemble des trois plans $x=0$, $y=0$, $x+y+z=0$. Ce dernier est perpendiculaire à l'intersection des plans bissecteurs des dièdres du trièdre formé par les plans de coordonnées, et, de plus, il passe par l'origine.

Sections par les plans de coordonnées. — Je reprends l'équation

$$bx^2+ay^2+ayz+bzx+xy=0.$$

En faisant, dans cette équation, $x=0$, il reste $ay(y+z)=0$: le plan des zy coupe donc les surfaces suivant deux génératrices, dont l'une est l'axe des z et l'autre la bissectrice de l'angle de la partie positive de l'axe des y et de la partie négative de l'axe des z.

Pour $y=0$, il reste $bx(x+z)=0$; le plan des zx coupe donc aussi les surfaces suivant deux génératrices.

Pour $z=0$, on a $bx^2+ay^2+xy=0$; le plan des xy coupe les surfaces suivant deux génératrices, puisque l'équation $bx^2+ay^2+xy=0$ est homogène; mais ces génératrices peuvent exister ou ne pas exister, suivant les valeurs de a et de b. On peut remarquer que ces droites seront toujours réelles, si l'on a, soit $a=0$, soit $b=0$.

L'axe des z est donc génératrice de la surface.

L'existence certaine de deux droites réelles comme intersection d'un des plans de coordonnées par les surfaces, puisque je suppose que a et b ne s'annulent pas à la fois, démontre que les surfaces représentées par l'équation proposée sont toujours des cônes réels ou des plans réels qui se coupent.

Pour déterminer la nature des sections, je coupe les surfaces par un plan $lx+my+nz=0$. Je puis prendre le plan passant par l'origine, puisque, pour des plans parallèles, on a des sections homothétiques. La projection sur le plan des zy de l'intersection sera

$$b(my+nz)^2+l^2ay^2+l^2ayz-lbz(my+nz)$$
$$-ly(my+nz)=0,$$

ou

$$y^2(bm^2+al^2-lm)^2+z^2(bn^2-bln)$$
$$+yz(2bmn+al^2-lbm-nl)=0.$$

Cette équation homogène ne peut représenter que des points, des droites qui se coupent ou des droites confondues; les sections peuvent donc être des ellipses, des hyperboles ou des paraboles. Suivant que la quantité $(2bmn+al^2-lbm-nl)^2-4(bm^2+al^2-lm)(bn^2-bln)$ sera négative, positive ou nulle, la courbe d'intersection sera du genre ellipse, hyperbole ou parabole.

On peut vérifier que, quand on a soit $a=0$, soit $b=0$, soit $a+b=1$, cette quantité ne peut être que positive ou nulle.

Pour voir s'il y a des sections circulaires, je coupe par une sphère $x^2+y^2+z^2=0$, et je forme l'équation des surfaces passant par l'intersection de cette sphère et des surfaces représentées par l'équation proposée. Cette équation est

$$x^2(b+\lambda)+y^2(a+\lambda)+\lambda z^2+ayz+bzx+xy=0;$$

j'exprime que cette équation représente deux plans qui se coupent, c'est-à-dire qu'il y a une infinité de centres en ligne droite. Je vais donc égaler à zéro le déterminant des équations du centre, qui sont

$$2(b+\lambda)x+y+bz=0,$$
$$x+2(a+\lambda)y+az=0,$$
$$bx+ay+2\lambda z=0.$$

Le déterminant égalé à zéro me donne l'équation

$$8\lambda(a+\lambda)(b+\lambda)+2ab-2(a+\lambda)b^2-2(b+\lambda)a^2-2\lambda=0;$$

je développe, et il vient

$$8\lambda^3+8\lambda^2(a+b)+2\lambda(4ab-b^2-a^2-1)+2ab(1-b-a)=0.$$

Cette équation doit avoir ses trois racines réelles, dont une correspond à deux plans réels, les deux autres à des plans imaginaires. On peut facilement vérifier que, dans l'un des trois cas, $a=0$, $b=0$, $a+b-1=0$, cela a lieu; car l'équation en λ a alors une racine nulle, ce qui indique que les plans cherchés sont précisément l'ensemble des plans représentés par l'équation proposée. Les deux autres racines sont réelles et ont pour expression $\lambda=\frac{2ab\pm\sqrt{5a^2+5b^2+4ab+1}}{2}$. Pour vérifier que, dans le cas général, cette équation a trois racines réelles, il suffit d'exprimer que la plus grande des racines de la dérivée et $+\infty$ donnent des résultats de signes contraires; car, en cherchant les racines de la dérivée, on voit qu'elles sont toujours réelles et qu'elles sont représentées par

$$\lambda=\frac{4(a+b)\pm\sqrt{16(a+b)^2-12(4ab-b^2-a^2-1)}}{2}.$$

L'infini donnant le signe $+$, il suffit d'exprimer que

$\lambda = \frac{4(a+b)+\sqrt{}}{2}$ donne le signe —; en effectuant les réductions, on arrive à une condition toujours remplie.

Pour reconnaître si les surfaces sont de révolution, je vais voir si les conditions $A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''}$, qui indiquent que les surfaces représentées par l'équation générale du second degré sont de révolution, peuvent être satisfaites. On suppose, toutefois, chacune des quantités $A - \frac{B'B''}{B} = \ldots \gtrless 0$. Je chercherai directement ce qui arrive dans le cas où ces quantités seraient nulles.

Ces conditions deviennent

$$b - \frac{b}{2a} = a - \frac{a}{2b} = -\frac{ab}{2}.$$

On aura, en supposant a et $b \gtrless 0$ des surfaces de révolution, quand a sera égal à b, et, de plus, $a - \frac{1}{2} = -\frac{a^2}{2}$; le plan bissecteur des (yz, zx) est alors un plan de symétrie.

Si, maintenant, l'une des quantités a ou b est nulle, on ne peut pas avoir de surfaces de révolution; car on sait que, lorsque, dans une équation du second degré, un seul rectangle manque, celle-ci ne peut représenter une surface de révolution.

Enveloppe dans le cas où ab est constant. — Je remplace b par $\frac{k}{a}$ dans l'équation (1), qui devient

$$(2) \qquad kx^2 + a^2y^2 + a^2yz + kzx + axy = 0.$$

L'équation dérivée étant

$$(3) \qquad 2ay^2 + 2ayz + xy = 0,$$

j'ai à éliminer a entre ces deux équations; de l'équation (3) je tire

$$a = -\frac{x}{2(y+z)},$$

et, reportant dans l'équation (2), il vient, pour l'équation de l'enveloppe,

$$4kx^2(y+z)^2 - x^2y(y+z) + 4kzx(y+z)^2 = 0.$$

Je divise le premier membre par $x(y+z) = 0$, ce qui supprime les solutions $x = 0, y + z = 0$, et il reste

$$4kx(y+z) - xy + 4kz(y+z) = 0,$$

équation du second degré qui représente une surface rapportée à son centre, qui est aussi un point de la surface. Les équations du centre sont

$$y(4k-1) + 4kz = 0,$$
$$x(4k-1) + 4kz = 0,$$
$$kx + ky + 2kz = 0.$$

Ces équations ne peuvent se réduire à deux que si l'on a

$$k = \frac{1}{4}, \quad \text{ou} \quad k = 0;$$

donc, dans tous les autres cas, l'équation trouvée pour l'enveloppe représente un cône : ce cône est alors toujours réel, ce que l'on peut vérifier facilement sur l'équation, au moyen de sections par les plans de coordonnées.

Question 986

(voir 2ᵉ série, t. IX, p. 144);

PAR M. H. LEZ.

Étant donnés, sur l'ovale de Cassini dont les foyers sont f et g, deux points a et b, désignons par α et β les points où les normales en a et b coupent l'axe de la *courbe qui renferme les foyers, et par i le point où cet axe est coupé par la perpendiculaire élevée sur le milieu du segment ab, démontrer la relation*

$$\frac{1}{i\beta}-\frac{1}{i\alpha}=\frac{1}{ig}-\frac{1}{if}.$$

(Laguerre.)

On sait que le lieu des points, tels que le produit de leurs distances à deux points fixes f, g soit constant, est représenté par l'équation

$$y^4+2(c^2+x^2)y^2+x^4-2c^2x^2=a^4-c^4,$$

d'où

$$y^2=-(c^2+x^2)\pm\sqrt{a^4+4c^2x^2},$$

et que, si l'on prend $a^2>2c^2$, on obtient ce qu'on appelle particulièrement l'ovale de Cassini. Or l'équation générale d'une normale à la courbe étant

$$\mathrm{Y}-y=\frac{f'_y(x,y)}{f'_x(x,y)}(\mathrm{X}-x),$$

l'équation de la normale au point a sera

$$y-y''=\frac{y''(x''^2+y''^2+c^2)}{x''(x''^2+y''^2+c^2)}(x-x''),$$

et celle du point b

$$y-y'=\frac{y'(x'^2+y'^2+c^2)}{x'(x'^2+y'^2-c^2)}(x-x').$$

En faisant $y=0$, on aura les abscisses de leurs points de rencontre avec l'axe des x, ou

$$o\alpha=\frac{2c^2x''}{x''^2+y''^2+c^2}\quad\text{et}\quad o\beta=\frac{2c^2x'}{x'^2+y'^2+c^2};$$

de plus, la perpendiculaire élevée sur le milieu de ab étant

$$2y-y'-y''=-\frac{x''-x'}{y''-y'}(2x-x'-x''),$$

si l'on fait $y = 0$, on aura

$$oi = \frac{y''^2 - y'^2 + x''^2 - x'^2}{2(x'' - x')}.$$

Pour simplifier les calculs, remplaçant y'^2 et y''^2 par leurs valeurs tirées de l'équation générale, il vient

$$o\alpha = \frac{2c^2x''}{\sqrt{a^4 + 4x''^2c^2}} \quad \text{et} \quad o\beta = \frac{2c^2x'}{\sqrt{a^4 + 4x'^2c^2}},$$

et

$$oi = \frac{\sqrt{a^4 + 4c^2x''^2} - \sqrt{a^4 + 4c^2x'^2}}{2(x'' - x')}.$$

Mais

$$if = c + oi = \frac{2c(x'' - x') + \sqrt{a^4 + 4c^2x''^2} - \sqrt{a^4 + 4c^2x'^2}}{2(x'' - x')},$$

$$ig = c - oi = \frac{2c(x'' - x') - \sqrt{a^4 + 4c^2x''^2} + \sqrt{a^4 + 4c^2x'^2}}{2(x'' - x')};$$

par suite, après avoir réduit au même dénominateur, on trouve

$$\frac{1}{if} = \frac{(x'' - x')\left[-2c(x'' - x') - \sqrt{a^4 + 4c^2x''^2} + \sqrt{a^4 + 4c^2x'^2}\right]}{4c^2x''x' + a^4 - \sqrt{a^4 + 4c^2x''^2}\sqrt{a^4 + 4c^2x'^2}},$$

$$\frac{1}{ig} = \frac{(x'' - x')\left[-2c(x'' - x') - \sqrt{a^4 + 4c^2x''^2} + \sqrt{a^4 + 4c^2x'^2}\right]}{4c^2x''x' + a^4 - \sqrt{a^4 + 4c^2x''^2}\sqrt{a^4 + 4c^2x'^2}};$$

de même, on a

$$\alpha i = oi - o\alpha = \frac{4c^2x''x' + a^4 - \sqrt{a^4 + 4c^2x''^2}\sqrt{a^4 + 4c^2x'^2}}{2(x'' - x')\sqrt{a^4 + 4c^2x''^2}},$$

$$i\beta = o\beta - oi = \frac{4c^2x''x' + a^4 - \sqrt{a^4 + 4c^2x''^2}\sqrt{a^4 + 4c^2x'^2}}{2(x'' - x')\sqrt{a^4 + 4c^2x'^2}},$$

d'où

$$\frac{1}{\alpha i} = \frac{2(x'' - x')\sqrt{a^4 + 4c^2x''^2}}{4c^2x''x' + a^4 - \sqrt{a^4 + 4c^2x''^2}\sqrt{a^4 + 4c^2x'^2}},$$

$$\frac{1}{i\beta} = \frac{2(x'' - x')\sqrt{a^4 + 4c^2x'^2}}{4c^2x''x' + a^4 - \sqrt{a^4 + 4c^2x''^2}\sqrt{a^4 + 4c^2x'^2}}.$$

Sous cette forme, on a quatre expressions fractionnaires de même dénominateur, ce qui permet de voir facilement qu'on peut écrire

$$\frac{1}{i\beta} - \frac{1}{i\alpha} = \frac{1}{ig} - \frac{1}{if}$$
$$= \frac{2(x'' - x')\left(\sqrt{a^4 + 4c^2x'^2} - \sqrt{a^4 + 4c^2x''^2}\right)}{4c^2x''x' + a^4 - \sqrt{a^4 + 4c^2x'^2}\sqrt{a^4 + 4c^2x''^2}}.$$

Remarque. — Quand $a^4 = 4c^4$, on a pour résultat

$$\frac{(x'' - x')\left(\sqrt{c^2 + x'^2} - \sqrt{c^2 + x''^2}\right)}{c\left(x''x' + c^2 - \sqrt{c^2 + x'^2}\sqrt{c^2 + x''^2}\right)}$$

Question 1009

(voir 2e série, t IX, p. 480);

PAR M. MORET-BLANC.

On donne une infinité de cercles tangents en un même point; si deux droites tournent autour de ce point, de manière à faire, avec la ligne des centres, des angles dont la somme soit constante, les circonférences décrites sur les cordes de ces cercles comme diamètres, étant prises deux à deux, ont même axe radical.

(CHADU.)

Supposons d'abord que l'une des deux droites coïncide avec la ligne des centres, la seconde faisant avec celle-ci un angle égal à la somme donnée. Soient OA et OB les cordes interceptées dans l'une quelconque des circonférences du système. Les cercles décrits sur OA et OB comme diamètres ont évidemment pour axe radical OB.

Soient OA' et OB un autre couple de cordes; puisque, AOA' + AOB' = AOB, il en résulte

$$AOA' = BOB';$$

A'B' est parallèle à AB; il en est de même de la droite qui joint les milieux des cordes OA' et OB'.

Donc les deux circonférences décrites sur OA' et OB', comme diamètres, ont pour axe radical la perpendiculaire abaissée du point commun O sur la ligne AB, c'est-à-dire la ligne OB; donc, etc.

Note. — La même question a été résolue par MM. Brocard et Callandreau.

Question 1001

(voir 2e série, t. IX, p. 431);

PAR M. O. CALLANDREAU.

a et m etant des entiers,

$$\frac{(a^2+a)[(a+1)^{m-1}-a^{m-1}]}{m-1} \quad \text{et} \quad \frac{m(a^2+a)[(a+1)^{m-1}-a^{m-1}]}{(m-1)[(a+1)^m-a^m]}$$

ne sont pas l'un la $m^{\text{ième}}$ *puissance d'un entier, l'autre un entier.*

Je développe la première expression, ce qui n'offre aucune difficulté; je trouve

$$a^m + \frac{m}{1.2}a^{m-1} + \frac{m(m-2)}{1.2.3}a^{m-2} + \frac{m(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^{m-3} + \ldots$$
$$+ \frac{m}{m-1}a^2 + \frac{a}{m-1},$$

ce qui est supérieur à a^m et inférieur à $(a+1)^m$, les termes de $(a+1)^m$ étant respectivement plus grands que les correspondants de la proposée. Il suit de là que la première expression n'est pas la $m^{\text{ième}}$ puissance d'un entier.

Quant à la seconde expression, si son numérateur était divisible par $(a+1)^m - a^m$, ce nombre étant premier avec a et $a+1$, avec $(a+1)^{m-1} - a^{m-1}$, car un facteur de $(a+1)^m - a^m$ qui diviserait $(a+1)^{m-1} - a^{m-1}$ devrait diviser $(a+1)[(a+1)^{m-1} - a^{m-1}]$ ou $(a+1)^m - a^m - a^{m-1}$, par suite a et enfin $(a+1)$, ce qui est impossible, ce nombre, dis-je, devrait diviser m; mais m est toujours plus petit. Donc, etc.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc.

Question 1006

(voir 2e série, t. IX, p. 472);

PAR M. MORET-BLANC.

L'aire de la courbe, lieu du centre d'une ellipse qui roule sans glisser sur une droite fixe, est la moyenne arithmétique entre les aires des cercles décrits sur les axes comme diamètres. (H. BROCARD.)

Prenons la droite fixe pour axe des abscisses de la courbe lieu des centres, et, pour position initiale de l'ellipse, celle où le point de contact est à l'extrémité du demi-petit axe OB.

Soient

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

l'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes; M un point de la courbe pris dans le premier quart, à partir de B; s l'arc BM; $OP = p$ la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente en M, et l'angle $BOM = \varphi$.

Appelons encore e l'excentricité de l'ellipse, ξ et η les coordonnées de la courbe lieu des centres, l'origine étant en B, et A l'aire comprise entre la courbe, l'axe des ξ et les deux ordonnées extrêmes, quand l'ellipse fait un demi-tour.

On a

$$dA = \eta d\xi,$$

$$\xi = s - PM, \quad d\xi = ds - dPM, \quad \eta = p,$$

$$x = a \sin\varphi, \quad y = b\cos\varphi = a\sqrt{1-e^2}\cos\varphi,$$

d'où

$$ds = a\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

$$\eta = p = \frac{a^2b^2}{\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}},$$

$$\overline{PM}^2 = r^2 - p^2 = a^2e^4\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{1 - e^2\sin^2\varphi},$$

$$PM = ae^2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{1 - e^2\sin^2\varphi},$$

$$dPM = ae^2\left[\frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}} + \frac{e^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(1 - e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\right],$$

$$\eta d\xi = a^2\sqrt{1-e^2}\left[1 - e^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - \frac{e^4\sin^2\varphi(1 - \sin^2\varphi)}{1 - e^2\sin^2\varphi}\right]d\varphi$$

$$= a^2\sqrt{1-e^2}\left(e^2\sin^2\varphi + \frac{1-e^2}{1 - e^2\sin^2\varphi}\right)d\varphi = dA,$$

$$\frac{A}{2} = a^2\sqrt{1-e^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^2\sin^2\varphi + \frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\varphi}\right)d\varphi$$

$$= a^2\sqrt{1-e^2}\left(\frac{\pi}{4}e^2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\varphi}d\varphi\right).$$

Dans cette dernière intégration, on peut remplacer $\sin^2\varphi$ par $\cos^2\varphi$; car, entre o et φ, $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ passent, en sens inverse, par les mêmes valeurs,

$$\int\frac{d\varphi}{1 - e^2\cos^2\varphi} = \frac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{1 + e\cos\varphi} + \frac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{1 - e\cos\varphi}.$$

Or

$$\int \frac{d\varphi}{1 + e\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \arccos \frac{e + \cos\varphi}{1 - e\cos\varphi};$$

$\int \frac{d\varphi}{1 - e\cos\varphi}$ s'en déduit en changant e en $-e$; donc

$$\int \frac{d\varphi}{1 - e\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \arccos \frac{\cos\varphi - e}{1 + e\cos\varphi}.$$

Ces intégrales, prises entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, se réduisent à

$$\frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \arccos e \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \arccos(-e);$$

donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{d\varphi}{1 + e\cos\varphi} + \frac{d\varphi}{1 - e\cos\varphi}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} [\arccos e + \arccos(-e)] = \frac{\pi}{\sqrt{1 - e^2}},$$

et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - e^2)d\varphi}{1 - e^2\sin^2\varphi} = \frac{\pi}{2}\sqrt{1 - e^2},$$

$$\frac{A}{2} = \frac{\pi}{2} a^2(1 - e^2) + \frac{\pi}{4} a^2e^2\sqrt{1 - e^2},$$

$$A = \pi a^2(1 - e^2) + \frac{\pi}{2} a^2e^2\sqrt{1 - e^2} = \pi b^2 + \frac{\pi}{2}\frac{bc^2}{a}.$$

Cette aire serait égale à celle de l'énoncé si, dans le second terme, ne se trouvait pas le facteur $\sqrt{1 - e^2} = \frac{b}{a}$; on voit qu'elle est un peu plus petite que l'aire indiquée.

Note. — La même question a été résolue par M. A. Morel.

Question 1011

(voir 2e série, t. IX, p. 480);

PAR M. O. CALLANDREAU.

On donne un tétraèdre conjugué à une surface du second degré. Si l'on désigne par I *l'indice du centre d'une sphère inscrite au tétraèdre (par rapport à la surface) et par* R *le rayon de cette sphère, l'expression* $\frac{I}{R^2}$ *a la même valeur pour toutes les sphères inscrites.*

(H. FAURE.)

Soit

$$A_{1,1}x_1^2 + A_{2,2}x_2^2 + A_{3,3}x_3^2 + A_{4,4}x_4^2 = 0$$

l'équation de la surface rapportée au tétraèdre conjugué; l'indice du centre de la sphère sera (2e série, t. IX, p. 38)

$$I = -\frac{f(\alpha)}{f(\beta)},$$

les α représentant les coordonnées du centre de la sphère, les β celles du centre de la surface. Les coordonnées du centre de la sphère sont

$$R,\quad R,\quad R,\quad R;$$

substituant et divisant par R^2, on obtient, pour l'expression de $\frac{I}{R^2}$,

$$\frac{I}{R^2} = -\frac{A_{1,1} + A_{2,2} + A_{3,3} + A_{4,4}}{f(\beta)}.$$

Les indices des sommets du tétraèdre sont respectivement égaux à

$$I_1 = -\frac{A_{1,1}h_1^2}{f(\beta)},\quad I_2 = -\frac{A_{2,2}h_2^2}{f(\beta)},\quad I_3 = -\frac{A_{3,3}h_3^2}{f(\beta)},\quad I_4 = -\frac{A_{4,4}h_4^2}{f(\beta)},$$

h_1, h_2, h_3, h_4 désignant les distances des sommets 1, 2, 3, 4 aux faces opposées; $\frac{1}{R^2}$ devient par là

$$\frac{I_1}{h_1^2}+\frac{I_2}{h_2^2}+\frac{I_3}{h_3^2}+\frac{I_4}{h_4^2}.$$

δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 étant les distances du centre de la surface aux faces opposées aux sommets 1, 2, 3, 4 (2^e série, t. IX, p. 320),

$$I_1=-\frac{h_1}{\delta_1},\quad I_2=-\frac{h_2}{\delta_2},\quad I_3=-\frac{h_3}{\delta_3},\quad I_4=-\frac{h_4}{\delta_4};$$

la somme cherchée est donc égale à la somme des inverses des indices des faces du tétraèdre conjugué. Or cette somme est constante (2^e série, t. IX, p. 409); donc, etc.

Question 995

(voir 2^e série, t. IX, p. 288);

PAR M. H. LEZ, à Lorrez.

On donne un triangle ABC *et une ellipse qui a pour foyers les deux points* B, C; *trouver le lieu des seconds foyers des ellipses inscrites au triangle* ABC *et dont un foyer est sur l'ellipse donnée.* (LEMOINE.)

On sait que, étant données trois tangentes et un foyer F d'une conique, on peut, en général, trouver l'autre. Il suffit, pour cela, d'abaisser du foyer F des perpendiculaires sur chacune des tangentes et de les prolonger d'une longueur égale à elles-mêmes; le centre du cercle directeur, passant par les trois points ainsi obtenus, est le second foyer cherché, et son rayon égale le grand axe de la conique.

Cette remarque faite, si, d'un point mobile M qui suit le périmètre de l'ellipse donnée ayant son centre en O, on abaisse des perpendiculaires sur chacun des côtés du triangle AFF′ et qu'on les prolonge d'une longueur égale à elles-mêmes, le centre M′ du cercle variable, passant par les trois points R, S, T ainsi obtenus, décrira la courbe dont le lieu demandé fait partie.

Soient donc $OF = OF' = c$, m et n les coordonnées du sommet A du triangle et γ, δ celles du point M.

L'équation de AF′ sera

$$cy + ny - mx - cm = 0,$$

et celle de AF

$$cy - ny + mx - cm = 0.$$

La perpendiculaire MS, abaissée du point M sur AF, sera représentée par

$$(y - \delta)m = (c - n)(x - \gamma);$$

de même on aura, pour la perpendiculaire à AF′,

$$(y - \delta)m = (c + n)(\gamma - x).$$

A l'aide de ces équations, on trouve, pour les coordonnées du point R′ d'intersection,

$$x = \frac{\gamma(n + c)^2 + (n + c)m\delta - cm^2}{(n + c)^2 + m^2},$$

$$y = \frac{m(n\gamma + c\gamma + m\delta + cn + c^2)}{(n + c)^2 + m^2},$$

et, pour celles du point S′,

$$x = \frac{\gamma(n - c)^2 + (n - c)m\delta + cm^2}{(n - c)^2 + m^2},$$

$$y = \frac{m(n\gamma - c\gamma + m\delta - cn + c^2)}{(n - c)^2 + m^2}.$$

Par suite, les coordonnées des points R et S sont

$$x = \frac{\gamma(n+c)^2 + 2(n+c)m\delta - 2cm^2 - m^2\gamma}{(n+c)^2 + m^2},$$

$$y = \frac{2mn\gamma + 2mc\gamma + 2c^2m + 2cmn + m^2\delta - \delta(n+c)^2}{(n+c)^2 + m^2},$$

$$x = \frac{\gamma(n-c)^2 + 2(n-c)m\delta + 2cm^2 - m^2\gamma}{(n-c)^2 + m^2},$$

$$y = \frac{2mn\gamma - 2mc\gamma + 2c^2m - 2cmn + m^2\delta - \delta(n-c)^2}{(n-c)^2 + m^2};$$

de plus, le coefficient angulaire de TS est égal à

$$\frac{m\delta + n\gamma - c\gamma - cn + c^2}{(n-c)\delta + mc - m\gamma},$$

et celui de RS est

$$\frac{m\delta + n\gamma + c\gamma + cn + c^2}{(n+c)\delta - mc - m\gamma}.$$

Avec ces données, on trouve, après réductions faites, que les équations des perpendiculaires élevées sur le milieu de TS et de TR sont

$$(1)\quad (c^2 - cn - c\gamma + n\gamma + m\delta)y = (\gamma m - mc - \delta n + \delta c)(x - c)$$

et

$$(2)\quad (c^2 + cn + c\gamma + n\gamma + m\delta)y = (\gamma m + mc - \delta n - \delta c)(x + c).$$

Ces perpendiculaires passent donc par les foyers F, F'; leur rencontre détermine le centre M' du cercle circonscrit au triangle RST.

Maintenant, pour avoir la courbe décrite par le point M', il suffit d'éliminer les variables γ, δ entre l'équation de l'ellipse

$$b^2\gamma^2 + a^2\delta^2 = a^2b^2 \quad \text{ou} \quad b^2\gamma^2 + (b^2 + c^2)\delta^2 = b^2(b^2 + c^2)$$

et les équations (1) et (2).

Or celles-ci donnent, en faisant

$$c^2 + nx + my = \mathrm{A}, \quad mx - ny = \mathrm{D},$$
$$c(n+x) = \mathrm{B}, \quad c(m-y) = \mathrm{E},$$

$$\gamma = c\frac{(\mathrm{D}-\mathrm{E})(\mathrm{A}+\mathrm{B}) + (\mathrm{D}+\mathrm{E})(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{(\mathrm{D}-\mathrm{E})(\mathrm{A}+\mathrm{B}) - (\mathrm{D}+\mathrm{E})(\mathrm{A}-\mathrm{B})} = \frac{c(\mathrm{AD}-\mathrm{BE})}{\mathrm{BD}-\mathrm{AE}},$$

$$\delta = 2c\frac{(\mathrm{D}'-\mathrm{E})(\mathrm{D}+\mathrm{E})}{(\mathrm{D}-\mathrm{E})(\mathrm{A}+\mathrm{B}) - (\mathrm{D}+\mathrm{E})(\mathrm{A}-\mathrm{B})} = \frac{c(\mathrm{D}^2-\mathrm{E}^2)}{\mathrm{BD}-\mathrm{AE}};$$

par suite,

$$b^2c^2(\mathrm{AD}-\mathrm{BE})^2 + c^2(c^2+b^2)(\mathrm{D}^2-\mathrm{E}^2)^2 - b^2(c^2+b^2)(\mathrm{BD}-\mathrm{AE})^2 = 0$$

ou

$$c^2(\mathrm{D}+\mathrm{E})(\mathrm{D}-\mathrm{E})[b^2(\mathrm{A}+\mathrm{B})(\mathrm{A}-\mathrm{B}) + (c^2+b^2)(\mathrm{D}+\mathrm{E})(\mathrm{D}-\mathrm{E})] \\ - b^4(\mathrm{BD}-\mathrm{AE})^2 = 0$$

sera l'équation cherchée, où il n'y a plus qu'à remplacer A, B, D, E par leurs valeurs.

Elle est du quatrième degré; elle représente une courbe composée de deux branches passant par les foyers F, F′, l'une qui, en s'ouvrant, s'étend indéfiniment au-dessous de l'axe des X, l'autre qui se replie, se croise au sommet A et, en s'écartant, s'allonge indéfiniment. Inutile de dire que le segment de la première branche, compris dans le triangle entre les foyers F, F′, répond directement à la question.

Remarque. — Dans le cas où le foyer M suivrait un cercle ayant pour centre l'origine O et pour rayon $\mathrm{OF} = c$, l'équation du lieu serait

$$c^2(\mathrm{AD}-\mathrm{BE})^2 + c^2(\mathrm{D}^2-\mathrm{E}^2)^2 - c^2(\mathrm{BD}-\mathrm{AE})^2 = 0$$

ou

$$(\mathrm{D}+\mathrm{E})(\mathrm{D}-\mathrm{E})[(\mathrm{A}+\mathrm{B})(\mathrm{A}-\mathrm{B}) + (\mathrm{D}+\mathrm{E})(\mathrm{D}-\mathrm{E})] = 0.$$

Comme on le voit, elle se décompose en deux facteurs, dont l'un est le produit des équations des côtés du triangle et dont l'autre représente un cercle passant par les foyers, ou

$$(m^2 + n^2 - c^2) x^2 + (m^2 + n^2 - c^2) y^2 + 4 c^2 m y = c^2 (m^2 + n^2 - c^2).$$

Question 1029

(voir 2ᵉ série, t. X, p. 240);

PAR M. A. PELLISSIER.

Les extrémités A *et* B *d'une longueur constante* AB *se meuvent sur les côtés d'un angle droit fixe* AOB : *trouver l'enveloppe de la perpendiculaire* BM *à* AB, *calculer la position des points de rebroussement et mener les tangentes en ces points.* (BROCARD.)

Soit φ l'angle variable de la droite BM avec l'axe des x; si l'on fait $AB = l$, cette droite a pour équation

$$y \cos\varphi - x \sin\varphi = l \cos^2\varphi,$$

ou encore

$$l \cos 2\varphi - 2y \cos\varphi + 2x \sin\varphi + l = 0.$$

Posons $\cos\varphi + \sqrt{-1} \sin\varphi = t$; elle devient

$$l^2 \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) - 2y \left(t + \frac{1}{t}\right) - 2x \sqrt{-1} \left(t - \frac{1}{t}\right) + 2l = 0,$$

ou

$$lt^4 - 2(y + x\sqrt{-1}) t^3 + 2lt^2 - 2(y - x\sqrt{-1}) t + l = 0.$$

Cette équation étant du quatrième degré en t, on voit déjà que l'enveloppe est une courbe de la quatrième classe, puisqu'on pourra, en général, lui mener quatre tangentes par un point donné. D'ailleurs l'équation de cette enveloppe s'obtiendra en égalant à zéro le discriminant du premier membre de l'équation considéré comme fonction de t; mais on sait que, pour une forme du quatrième degré,

$$(a, b, c, d, e \between x, y)^4,$$

le discriminant Δ est donné par la formule

$$\Delta = S^3 - 27T^2,$$

où S et T sont les deux invariants de la forme, c'est-à-dire

$$S = ae - 4bd + 3c^2,$$

$$T = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3.$$

Dans le cas actuel, nous avons

$$S = \tfrac{1}{3}[4l^2 - 3(x^2 + y^2)],$$
$$T = \tfrac{1}{27} l(8l^2 - 9y^2 + 18x^2).$$

L'équation de l'enveloppe sera donc

$$[4l^2 - 3(x^2 + y^2)]^3 = l^2(8l^2 - 9y^2 + 18x^2)^2;$$

c'est donc une courbe du sixième ordre. L'origine est un point double, et, comme il y a une seule tangente $x = 0$ en ce point, c'est un rebroussement. On a un rebroussement symétrique au-dessous de Ox.

Il y a quatre autres points de rebroussement à l'intersection du cercle

$$x^2 + y^2 = \tfrac{4}{3} l^2$$

et de l'hyperbole

$$18x^2 - 9y^2 + 8l^2 = 0.$$

On voit très-facilement que la courbe en ces points a mêmes tangentes que l'hyperbole.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc, Gambey et Lez.

Question 1022.

(voir 2e série, t. X, p. 192);

Par M. A. PELLISSIER.

Démontrer que, en un point quelconque d'une spirale équiangle, la conique osculatrice est une ellipse et que le point de contact est à l'extrémité de l'un des diamètres conjugués égaux de l'ellipse, et la tangente de l'angle de ces diamètres est égale à trois fois la tangente de l'angle de la spirale.

(A. Witworth.)

1. Si, parallèlement à la tangente d'une courbe et à une distance infiniment petite, on mène une corde, la limite des positions de la droite qui joint le point de contact au milieu de cette corde est une ligne que M. Transon a nommée *axe de déviation* (*Journal de Liouville*, 1841). Cette ligne fait, en général, avec la normale un angle fini α (*angle de déviation*), dont la tangente trigonométrique est donnée par la formule

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{3}\frac{dR}{ds},$$

où R est le rayon de courbure et s l'arc de la courbe considérée (P. Serret, *Des Méthodes en Géométrie*, p. 98).

Lorsque la courbe est une conique, il est clair que l'axe de déviation en un point n'est autre que le diamètre qui passe par ce point.

2. Considérons une conique ayant avec la courbe donnée un contact du troisième ordre; l'axe de déviation sera alors le même pour les deux courbes au point de contact; ce qu'on peut aussi exprimer en disant que toutes les coniques qui ont en ce point un contact du

troisième ordre avec la courbe donnée ont leurs centres sur une ligne droite (l'axe de déviation). Si nous prenons sur la courbe un point infiniment voisin du premier, l'axe de déviation en ce point rencontrera le premier en un point, et, à la limite, quand les points voisins de la courbe se confondront, ce point de rencontre pourra s'appeler le *centre de déviation*. D'après ce que nous venons de dire, on voit que c'est le centre de la conique ayant avec la courbe, au point considéré, un contact du quatrième ordre, c'est-à-dire de la conique osculatrice. Ainsi la conique osculatrice en un point d'une courbe de degré quelconque est déterminée par les conditions suivantes : elle a son centre au centre de déviation; elle touche la courbe au point donné, et elle a en ce point même courbure.

3. L'application de ces principes au cas de la spirale équiangle conduit facilement à la solution de la question. Soit donc

$$\rho = a e^{m\omega}$$

l'équation de cette courbe en coordonnées polaires; par des formules connues, on a

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2} = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m}\,d\rho,$$

$$\mathrm{R} = \frac{ds}{d\omega} = \sqrt{m^2+1}\,\rho, \quad \text{d'où} \quad d\mathrm{R} = \sqrt{m^2+1}\,d\rho.$$

Par conséquent,

$$\tang\alpha = \frac{1}{3}\frac{d\mathrm{R}}{ds} = \frac{1}{3}m.$$

L'angle de déviation est donc constant.

Prenons deux points M, M′ infiniment voisins sur la courbe; soient Mc, M′c les normales et Md, M′d les axes de déviation en ces points; si nous faisons passer un cercle par les points M, M', c, il passera aussi par le point d, puisque les angles $d\text{M}c$, $d\text{M}'c$ sont égaux tous deux à α. Cela sera encore vrai à la limite, quand le point M' viendra se confondre avec le point M; mais alors c et d deviennent respectivement le centre de courbure C et le centre de déviation D en M, et le cercle MM'cd devient le cercle décrit sur le rayon de courbure MC comme diamètre. Pour obtenir le point D, il suffira donc de décrire sur MC une circonférence et de mener MD faisant avec MC l'angle α; le point de rencontre D avec la circonférence sera le point cherché.

En résumé, la conique osculatrice a son centre en D; elle est tangente à MT (tangente de la spirale), et elle a au point M un rayon de courbure égal à MC.

Abaissons DP perpendiculaire sur MT; CD étant perpendiculaire sur MD, nous avons deux triangles rectangles CMD et PMD qui donnent

$$\frac{\text{MD}}{\text{DP}} = \frac{\text{CM}}{\text{MD}}.$$

Appelons a' le diamètre DM de la conique, b' son conjugué, p la perpendiculaire DP abaissée du centre sur la tangente et R le rayon de courbure MC; l'égalité précédente deviendra alors

$$\frac{a'}{p} = \frac{\text{R}}{a'} \quad \text{ou} \quad a'^2 = p\text{R}.$$

D'ailleurs, par une propriété bien connue, nous avons aussi

$$\text{R} = \frac{b'^2}{p} \quad \text{ou} \quad b'^2 = p\text{R}.$$

On doit donc avoir $a' = b'$, ce qui montre que la conique osculatrice est une ellipse et que le point de contact est à l'extrémité d'un des diamètres conjugués égaux.

Il reste à faire voir que la tangente de l'angle de ces diamètres est égale à trois fois la tangente de l'angle de la spirale. Appelant V ce dernier angle, on a

$$\operatorname{tang} V = \rho \frac{d\omega}{d\rho} = \frac{1}{m}.$$

L'angle ε des diamètres conjugués égaux est égal à l'angle DMP du diamètre DM avec la tangente MT, c'est-à-dire qu'il est complémentaire de l'angle de déviation α. Par suite,

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \cot \alpha = \frac{3}{m}.$$

Donc enfin

$$\operatorname{tang} \varepsilon = 3 \operatorname{tang} V.$$ C. Q. F. D.

Question 1034

(voir 2e série, t. X, p. 336),

PAR M. E. PELLET.

On prend sur une surface du second degré une section plane quelconque ; cette courbe peut être prise pour la focale d'une surface nouvelle passant par l'une ou l'autre des focales de la première. (DARBOUX.)

Ce théorème peut se généraliser et s'énoncer ainsi :

On prend sur une surface du second degré une section plane quelconque ; cette courbe peut être prise pour la focale d'une surface nouvelle circonscrite à une quelconque des surfaces du second degré homofocales à la première.

Je rappellerai d'abord quelques formules. Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{1}$$

l'équation d'une surface du second degré. L'équation du cône circonscrit à cette surface et ayant pour sommet le point x_0, y_0, z_0 peut se mettre sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 - \frac{1}{f_0}\left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} - 1\right)^2 = 0,$$

en posant

$$f_0 = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1.$$

Si l'on rapporte le cône à ses axes principaux pris pour axes des X, Y, Z, cette équation deviendra

$$S_1 X^2 + S_2 Y^2 + S_3 Z^2 = 0,$$

S_1, S_2, S_3 étant les racines de l'équation

$$\begin{aligned} S^3 + \frac{1}{f_0 a^2 b^2 c^2}\big[&a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 \\ &- x_0^2(b^2+c^2) - y_0^2(c^2+a^2) - z_0^2(a^2+b^2)\big]S^2 \\ + \frac{1}{f_0 a^2 b^2 c^2}&(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - a^2 - b^2 - c^2)\,S + \frac{1}{f_0 a^2 b^2 c^2} = 0. \end{aligned}$$

D'autre part, soit $\dfrac{x^2}{a^2 - u} + \dfrac{y^2}{b^2 - u} + \dfrac{z^2}{c^2 - u} - 1 = 0$, où u est un paramètre variable, l'équation générale des surfaces homofocales à la surface (1). La valeur du paramètre u pour les surfaces homofocales à (1) qui passent par le point (x_0, y_0, z_0) est donnée par l'équation

$$\frac{x_0^2}{a^2 - u} + \frac{y_0^2}{b^2 - u} + \frac{z_0^2}{c^2 - u} - 1 = 0,$$

ou, en développant,

$$\begin{aligned} u^3 &+ (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - a^2 - b^2 - c^2)\,u \\ &+ \big[a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 \\ &\qquad - x_0^2(b^2 + c^2) - y_0^2(c^2 + a^2) - z_0^2(a^2 + b^2)\big]\,u \\ &\qquad\qquad + f_0 a^2 b^2 c^2 = 0. \end{aligned}$$

On voit immédiatement que les racines de l'équation en S sont les inverses des racines de l'équation en u; et, en désignant celles-ci par u_1, u_2, u_3, on peut poser

$$S_1 = \frac{1}{u_1}, \quad S_2 = \frac{1}{u_2}, \quad S_3 = \frac{1}{u_3}.$$

En outre, les équations de l'axe des X, dans le premier système d'axes coordonnés, sont

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{x_0}{a^2 - u_1}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{y_0}{b^2 - u_1}} = \frac{z - z_0}{\dfrac{z_0}{c^2 - u_1}},$$

et l'on aura les équations de l'axe des Y et celles de l'axe des Z en changeant, dans celles-ci, u_1 en u_2 ou en u_3.

Cela posé, soient

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

l'équation de la première surface,

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} - 1 = 0$$

l'équation de la seconde homofocale à la première, a_1^2, b_1^2, c_1^2 représentant $a^2 - u$, $b^2 - u$, $c^2 - u$ respectivement. Si l'on représente par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre de la section plane, l'équation de son plan pourra s'écrire

$$(3) \qquad \frac{x_0(x - x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} + \frac{z_0(z - z_0)}{c^2} = 0.$$

Considérons les surfaces représentées par les équations

$$(1') \qquad \frac{x^2}{a^2(f_0 + 1)} + \frac{y^2}{b^2(f_0 + 1)} + \frac{z^2}{c^2(f_0 + 1)} - 1 = 0,$$

$$(2') \qquad \frac{x^2}{a_1^2(f_0 + 1)} + \frac{y^2}{b_1^2(f_0 + 1)} + \frac{z^2}{c_1^2(f_0 + 1)} - 1 = 0,$$

f_0 désignant toujours la quantité $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1$. Elles forment un système homothétique au système des surfaces (1) et (2); de plus, la surface (1') passe par le point (x_0, y_0, z_0), et son plan tangent en ce point est le plan (3).

Le cône ayant pour sommet le point (x_0, y_0, z_0) et circonscrit à la surface (2') a pour équation

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x^2}{a_1^2(f_0+1)}+\frac{y^2}{b_1^2(f_0+1)}+\frac{z^2}{c_1^2(f_0+1)}-1 \\ &\quad -\frac{1}{F_0}\left(\frac{xx_0}{a_1^2(f_0+1)}+\frac{yy_0}{b_1^2(f_0+1)}+\frac{zz_0}{c_1^2(f_0+1)}-1\right)^2=0, \end{aligned}\right.$$

où

$$F_0=\frac{x_0^2}{a_1^2(f_0+1)}+\frac{y_0^2}{b_1^2(f_0+1)}+\frac{z_0^2}{c_1^2(f_0+1)}-1.$$

Si l'on rapporte le cône (4) à ses axes principaux pris pour axes des X, Y, Z, son équation devient

$$\frac{X^2}{U_1}+\frac{Y^2}{U_2}+\frac{Z^2}{U_3}=0,$$

U_1, U_2, U_3 étant les racines de l'équation

$$\frac{x_0^2}{a_1^2(f_0+1)-U}+\frac{y_0^2}{b_1^2(f_0+1)-U}+\frac{z_0^2}{c_1^2(f_0+1)-U}-1=0.$$

Si l'on ajoute aux premiers membres des équations (1') et (2') la quantité $\frac{-1}{f_0+1}+1$, les nouvelles équations représenteront les surfaces (1) et (2). Si l'on ajoute la même quantité au premier membre de l'équation (4), on obtient la surface

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x^2}{a_1^2(f_0+1)}+\frac{y^2}{b_1^2(f_0+1)}+\frac{z^2}{c_1^2(f_0+1)}-\frac{1}{f_0+1} \\ &\quad -\frac{1}{F_0}\left(\frac{xx_0}{a_1^2(f_0+1)}+\frac{yy_0}{b_1^2(f_0+1)}+\frac{zz_0}{c_1^2(f_0+1)}-1\right)^2=0, \end{aligned}\right.$$

qui a pour équation, dans le système des X, Y, Z,

$$(5')\qquad \frac{X^2}{U_1}+\frac{Y^2}{U_2}+\frac{Z^2}{U_3}-\frac{1}{f_0+1}+1=0.$$

Cette surface, d'après l'équation (5), est circonscrite à la surface (1), et la courbe de contact est située dans le plan

$$\frac{xx_0}{a_1^2(f_0+1)}+\frac{yy_0}{b_1^2(f_0+1)}+\frac{zz_0}{c_1^2(f_0+1)}-1=0.$$

Deux des axes des X, Y, Z sont dirigés suivant les axes de la conique intersection de la surface (1) avec le plan (3). Nous les prendrons pour axes des X et des Y. Le plan (3) a alors pour équation, dans le second système d'axes coordonnés,

$$(3')\qquad Z=0.$$

De plus, il est clair que la racine U_3 de l'équation en U est égale à $-u(f_0+1)$, puisque la surface qui correspond à cette racine est la surface (1').

L'équation (5') peut s'écrire

$$\frac{X^2}{-U_1\dfrac{f_0}{f_0+1}}+\frac{Y^2}{-U_2\dfrac{f_0}{f_0-1}}+\frac{Z^2}{-U_3\dfrac{f_0}{f_0-1}}-1=0.$$

La conique focale de la surface qu'elle représente, située dans le plan $Z=0$, qui est le plan (3), a donc pour équation

$$(\alpha)\qquad \frac{X^2}{(U_3-U_1)\dfrac{f_0}{f_0-1}}+\frac{Y^2}{(U_3-U_2)\dfrac{f_0}{f_0-1}}-1=0 \text{ avec } Z=0.$$

Je dis que cette conique coïncide avec l'intersection de la surface (1) avec le plan (3). D'abord les axes ont même direction; il suffit donc de démontrer qu'ils sont égaux en grandeur. A cet effet, posons

$$U_3 - U_1 = U'_1, \quad U_3 - U_2 = U'_2;$$

U'_1 et U'_2 sont les racines, autres que zéro, de l'équation

$$\frac{x_0^2}{a^2(f_0+1)+U'} + \frac{y_0^2}{b^2(f_0+1)+U'} + \frac{z_0^2}{c^2(f_0+1)+U'} - 1 = 0,$$

que l'on obtient en remplaçant, dans l'équation en U, U par $U_3 - U' = -u(f_0+1) - U'$, c'est-à-dire les racines de l'équation

$$\frac{\frac{x_0^2}{a^2}}{a^2(f_0+1)+U'} + \frac{\frac{y_0^2}{b^2}}{b^2(f_0+1)+U'} + \frac{\frac{z_0^2}{c^2}}{c^2(f_0+1)+U'} = 0.$$

On voit donc que

$$-\frac{U'_1}{f_0+1}, \quad -\frac{U'_2}{f_0+1}$$

sont les carrés des axes de la conique intersection de la surface (1) par le plan

$$(6) \qquad \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 0,$$

parallèle au plan (3). Les plans (3) et (6) donnent pour intersection, avec la surface (1), des coniques homothétiques, et le carré du rapport d'homothétie, facile à calculer, est $-f_0$; de sorte que les axes de la conique, intersection de (1) et (3), sont

$$\frac{U'_1 f_0}{f_0+1} \quad \text{et} \quad \frac{U'_2 f_0}{f_0+1}.$$

Cette conique coïncide donc avec celle représentée par les équations (α). C. Q. F. D.

En faisant tendre u vers l'une des quantités a^2, b^2, c^2, on a la proposition de M. Darboux.

Question 1057

(voir 2ᵉ série, t. XI, p. 95);

PAR M. T. DOUCET,
Professeur au lycée de Lyon.

En un point M *d'un tore, on mène une droite* MT, *située dans le plan tangent. Soient a et b les points où cette droite coupe la surface ; menons les deux sphères qui, passant par* M, *touchent la surface aux points a et b ; désignons par* α *et* β *les centres de ces sphères et par* I *le point milieu du segment* $\alpha\beta$.

Cela posé, si, par le point M, *nous menons une droite parallèle à la droite qui joint le point* I *au centre du tore, dirigée dans le même sens et de longueur double, le point extrême de cette droite est le centre de courbure de la section faite dans le tore par le plan normal passant par* MT. (LAGUERRE.)

Soient O le centre du tore ; A celui de la circonférence méridienne, à laquelle appartient le point M ; N l'intersection de la droite AM et de l'axe de révolution. Les points A et N sont les centres de courbure des sections principales du tore en M.

Posons $\mathrm{MA} = \mathrm{R}$, $\mathrm{OA} = a$, $\mathrm{MOA} = \lambda$. Les rayons de courbure principaux, dont les directions sont opposées pour tout point de la nappe intérieure du tore, sont R et $\dfrac{a}{\cos\lambda} - \mathrm{R}$.

Si l'on désigne par ω l'inclinaison de MT sur la tangente en M au parallèle de ce point et par ρ le rayon de courbure de la section normale, dont le plan est conduit suivant MT, on a, d'après le théorème d'Euler,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sin^2\omega}{\mathrm{R}} - \frac{\cos^2\omega}{\dfrac{a}{\cos\lambda} - \mathrm{R}},$$

d'où

$$\rho = \frac{R(a - R\cos\lambda)}{a\sin^2\omega - R\cos\lambda}; \tag{1}$$

la direction positive est MA.

Rapportons le tore à trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, en prenant pour OZ l'axe de révolution et pour plan des ZY le méridien du point M. L'équation de la surface sera

$$(X^2 + Y^2 + Z^2 + a^2 - R^2)^2 - 4a^2(X^2 + Y^2) = 0. \tag{2}$$

Pour la rapporter à un autre système rectangulaire Mx, My, Mz, en prenant pour Mz la normale en M et conservant pour plan des zy le méridien de ce point, on a les formules de transformation

$$\left\{\begin{array}{l} X = x, \\ Y = a + y\sin\lambda - (z + R)\cos\lambda, \\ Z = y\cos\lambda - (z + R)\sin\lambda. \end{array}\right. \tag{3}$$

Faisons $z = 0$ dans ces expressions de X, Y et Z, et substituons-les dans l'équation (2), nous aurons la section du tore par son plan tangent. L'équation polaire, rapportée au pôle M et à la tangente au parallèle prise pour axe, sera

$$r^2 + 4ar\sin\omega\sin\lambda + 4a(a\sin^2\omega - R\cos\lambda) = 0. \tag{4}$$

Les deux racines r_1 et r_2 de cette équation, pour la valeur de ω qui convient à MT, correspondent aux points a et b, où cette tangente coupe le tore.

L'équation d'une sphère, passant par le point M et rapportée au second système d'axes, est

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2m_1 x - 2n_1 y - 2p_1 z = 0,$$

m_1, n_1, p_1 désignant les coordonnées de son centre α. Si l'on écrit qu'elle passe aussi au point a, on a

$$\frac{r_1}{2} = m_1 \cos\omega + n_1 \sin\omega. \tag{5}$$

Exprimons maintenant que le point α est situé sur la normale en a, à la surface du tore.

Par rapport aux premiers axes, la normale en un point X', Y', Z' a les équations suivantes, dans lesquelles on a posé, pour abréger,

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 - a^2 - R^2 = t^2,$$

$$\frac{X - X'}{X'} = \frac{Y - Y'}{Y'} = \frac{t^2}{t^2 + 2a^2}\,\frac{Z - Z'}{Z'}.$$

Si l'on élimine z entre les deux dernières des équations (3), on a

$$Y \sin\lambda + Z \cos\lambda = a \sin\lambda + y. \tag{6}$$

Pour le point α, appartenant à la normale, on a, d'après les équations de cette droite,

$$Y = \frac{X}{X'}\,Y', \quad Z = Z' + Z'\frac{t^2 + 2a^2}{t^2}\,\frac{X - X'}{X'}.$$

Faisons, dans ces valeurs de Y et de Z,

$$X = m_1, \quad X' = r_1 \cos\omega,$$

$$Y' = a + r_1 \sin\omega \sin\lambda - R\cos\lambda, \quad Z' = r_1 \sin\omega \cos\lambda + R \sin\lambda,$$

$$t^2 = r_1^2 + 2a(r_1 \sin\omega \sin\lambda - R\cos\lambda),$$

et substituons, dans l'équation (6), où il faut faire, en outre, $y = n_1$. L'équation obtenue, combinée avec (5), donne

$$m_1 = \frac{R\cos\omega\cos\lambda}{\dfrac{r_1}{2a} + \sin\omega\sin\lambda};$$

on aurait de même, pour l'x du point β,

$$m_2 = \frac{\mathrm{R}\cos\omega\cos\lambda}{\frac{r_2}{2a} + \sin\omega\sin\lambda}.$$

On voit, en se reportant à l'équation (4), que la somme des dénominateurs est nulle; donc

$$m_1 + m_2 = 0.$$

L'équation (5) en r_1, m_1, n_1, ajoutée à l'équation analogue en r_2, m_2, n_2, donne

$$\frac{n_1 + n_2}{2} = -a\sin\lambda$$

Enfin, à l'équation $\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{X}'} = \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{Y}'}$, que fournit la normale et qui a lieu entre m_1, n_1, p_1, ajoutons l'équation analogue entre m_2, n_2, p_2, en ayant soin de remplacer $m_1 + m_2$ et $n_1 + n_2$ par 0 et $-2a\sin\lambda$, nous obtenons

$$\frac{p_1 + p_2}{2} = a\cos\lambda - \mathrm{R} + \frac{\mathrm{R}(a - \mathrm{R}\cos\lambda)}{a\sin^2\omega - \mathrm{R}\cos\lambda};$$

ainsi les coordonnées m, n et p du point I, si l'on tient compte pour la dernière de l'équation (1), sont

$$m = 0,$$
$$n = -a\sin\lambda,$$
$$p = a\cos\lambda - \mathrm{R} + \frac{\rho}{2}.$$

La première montre que le point I est dans le méridien du point M; la deuxième, que la droite IO est parallèle à la normale MA; la troisième que IO et $\frac{\rho}{2}$ sont deux lignes égales et dirigées dans le même sens.

Question 1031

(voir 2ᵉ série, t. X, p. 335);

Par M. MORET-BLANC.

Trouver les conditions pour que les deux plus courtes distances entre les côtés opposés d'un quadrilatère gauche se coupent. (A. M.)

Soient ABCD le quadrilatère gauche donné, EF, GH les plus courtes distances des droites AB, CD et AD, BC, lesquelles se coupent en O. Les droites EH, GF étant, par hypothèse, dans un même plan, se rencontreront en un point I qui appartient au plan ABC et au plan ADF, et, par suite, à leur intersection AC.

Cela posé, les triangles ABC et ADC, coupés respectivement par les droites EH, GF, donnent, par le théorème des transversales,

$$AE.BH.CI = AI.BE.CH,$$
$$AI.CF.DG = AG.CI.DF,$$

d'où, en multipliant membre à membre et supprimant les facteurs communs aux deux membres,

$$(1)\qquad AE.BH.CF.DG = AG.BE.CH.DF,$$

c'est-à-dire que le produit de quatre segments non consécutifs doit être égal au produit des quatre autres.

Cette condition est nécessaire; je dis de plus qu'elle est suffisante.

En effet, la relation (1) étant donnée, supposons que les droites EF, GH ne se coupent pas. On pourrait mener, par le point E, une droite EF′ s'appuyant sur les droites CH et CD, et l'on aurait

$$(2)\qquad AE.BH.CF'.DG = AG.BE.CH.DF'.$$

Divisant membre à membre les relations (1) et (2), on aurait

$$\frac{CF}{CF'} = \frac{DF}{DF'}, \quad \text{ou} \quad \frac{CF}{DF} = \frac{CF'}{DF'},$$

ce qui est impossible, à moins que le point F' ne se confonde avec le point F. Donc les droites EF et GH se coupent.

Question 1067

(voir 2e série, t. XI, p. 143);

PAR M. GAMBEY.

Parmi toutes les ellipses qui passent par quatre points, trouver celle dont l'aire est minimum.

(T. DOUCET.)

Soient AA', BB' les droites qui joignent, deux à deux, les points donnés, et O leur point d'intersection.

Posons

$$OA = \lambda,$$
$$OA' = \lambda'$$
$$OB = \mu,$$
$$OB' = \mu',$$

et prenons pour axes de coordonnées ces droites elles-mêmes.

L'équation générale des coniques passant par les quatre points donnés est alors

$$\mu\mu' x^2 + 2hxy + \lambda\lambda' y^2 - \mu\mu'(\lambda+\lambda')x - \lambda\lambda'(\mu+\mu')y + \lambda\lambda'\mu\mu' = 0,$$

h étant une indéterminée.

Les axes sont généralement obliques et font entre eux un angle donné θ. Passons aux axes rectangulaires en conservant l'ancien axe des x. Nous savons que, si l'équation générale est représentée par

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0,$$

la quantité $\dfrac{ab - h^2}{\sin^2\theta}$ ne change pas par la transformation. De plus, si l'équation de la conique, rapportée à son centre et à ses axes, est

$$Mx^2 + Ny^2 + F = 0,$$

on sait aussi que l'on a toujours

$$\frac{ab - h^2}{\sin^2\theta} = 4MN.$$

Or, comme la conique doit être une ellipse, on aura aussi toujours $MN > 0$, tant que h^2 sera plus petit que ab.

Enfin, l'aire de l'ellipse étant inversement proportionnelle à la racine carrée du produit MN, il suffit d'étudier la variation de ce produit pour en conclure celle de l'aire.

Remplaçons a et b par leurs valeurs, nous aurons

$$\frac{\lambda\lambda'\mu\mu' - h^2}{\sin^2\theta} = MN.$$

Le minimum de l'aire correspond au maximum de MN. Or ce maximum a lieu pour $h = 0$.

L'équation de l'ellipse demandée est donc

$$\mu\mu' x^2 + \lambda\lambda' y^2 - \mu\mu'(\lambda + \lambda')x - \lambda\lambda'(\mu + \mu')y + \lambda\lambda'\mu\mu' = 0.$$

Remarque. — Si l'on avait $\lambda\lambda'\mu\mu' = h^2$, le produit MN étant nul, l'aire serait infinie. En effet, l'ellipse est devenue alors une parabole.

Question 1111

(voir 2ᵉ série, t. XII, p. 191);

Par M. MORET-BLANC.

On sait que si a_1 *est une valeur approchée de* $\sqrt{n}$,

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{n}{a_1}\right),\quad a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{n}{a_2}\right),\quad a_4 = \frac{1}{2}\left(a_3 + \frac{n}{a_3}\right),\ldots$$

seront des valeurs de plus en plus approchées de $\sqrt{n}$.

On sait aussi que

$$\sqrt{a_1^2 + r} = a_1 + \cfrac{r}{2a_1 + \cfrac{r}{2a_1 + \ldots}}$$

Or M. Wœpcke a démontré que, si dans le second membre de cette équation on s'arrête au troisième quotient incomplet, on aura a_2.

On demande à quels quotients incomplets il faudra s'arrêter dans le second membre de cette même équation pour avoir

$$a_3,\quad a_4,\quad a_5,\ldots,$$

ou bien de quelle manière on peut démontrer que les valeurs

$$a_3,\quad a_4,\quad a_5,\ldots$$

ne sont pas comprises dans l'expression

$$a_1 + \cfrac{r}{2a_1 + \cfrac{r}{2a_1 + \ldots}}$$

(Balthazar Boncompagni.)

Remarquons d'abord que, a_1 étant approché par défaut, a_2, a_3, a_4,... seront des valeurs approchées par excès, puisque la moyenne arithmétique de deux nombres a_m, $\frac{n}{a_m}$ est plus grande que leur moyenne géométrique $\sqrt{n}$; et, comme chacune de ces valeurs est moindre que la précédente, elles convergent vers $\sqrt{n}$.

On a, d'après la loi de formation,

$$a_m = \frac{a_{m-1}^2 + n}{2a_{m-1}},$$

ou, en posant $a_p = \frac{R_p}{S_p}$,

$$a_m = \frac{R_{m-1}^2 + nS_{m-1}^2}{2R_{m-1}S_{m-1}}.$$

Exprimant $a_2, a_3, \ldots$ en fonction de a_1 et de r, on a

$$a_2 = \frac{2a_1^2 + r}{2a_1}, \quad a_3 = \frac{8a_1^4 + 8a_1^2 r + r^2}{8a_1^3 + 4a_1 r},$$

$$a_4 = \frac{128a_1^8 + 256a_1^6 r + 160a_1^4 r^2 + 32a_1^2 r^3 + r^4}{128a_1^7 + 192a_1^5 r + 80a_1^3 r^2 + 8a_1 r^3}.$$

$$a_5 = \frac{\begin{array}{c}(128a_1^8 + 256a_1^6 r + 160a_1^4 r^2 + 32a_1^2 r^3 + r^4)^2 \\ + (a_1^2 + r)(128a_1^7 + 192a_1^5 r + 80a_1^3 r^2 + 8a_1 r^3)^2\end{array}}{\begin{array}{c}2(128a_1^8 + 256a_1^6 r + 160a_1^4 r^2 + 32a_1^2 r^3 + r^4) \\ \times (128a_1^7 + 192a_1^5 r + 80a_1^3 r^2 + 8a_1 r^3)\end{array}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces fractions sont irréductibles si a_1 et r sont premiers entre eux; si ces deux nombres ont pour plus grand commun diviseur d, les deux termes de a_n seront divisibles par $d^{2^{n-2}}$.

Formons maintenant les réduites successives de la fraction continue. Les deux premières étant $\frac{1}{0}$ et $\frac{a_1}{1}$, une réduite de rang quelconque se forme en multipliant respectivement les deux termes de la réduite précédente par $2a_1$ et ajoutant ceux de la réduite antéprécédente multipliés par r. On obtient ainsi les réduites

$$\frac{1}{0},\quad \frac{a_1}{1},\quad \frac{2a_1^2+r}{2a_1},\quad \frac{4a_1^3+3a_1 r}{4a_1^2+r},\quad \frac{8a_1^4+8a_1^2 r+r^2}{8a_1^3+4a_1 r},$$

$$\frac{16a_1^5+20a_1^3 r+5a_1 r^2}{16a_1^4+12a_1^2 r+r^2},\quad \frac{32a_1^6+48a_1^4 r+18a_1^2 r^2+r^3}{32a_1^5+32a_1^3 r+6a_1 r^2},$$

$$\frac{64a_1^7+112a_1^5 r^2+56a_1^3 r^2+7a_1 r^3}{64a_1^6+80a_1^4 r+24a_1^2 r^2+r^3},$$

$$\frac{128a_1^8+256a_1^6 r+160a_1^4 r^2+32a_1^2 r^3+r^4}{128a_1^7+192a_1^5 r+80a_1^3 r^2+8a_1 r^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On voit que la cinquième réduite est égale à a_3, la neuvième à a_4.

Si l'on désigne ces fractions successives par $\frac{P_0}{Q_0}$, $\frac{P_1}{Q_1}$, $\frac{P_2}{Q_2}, \ldots$, on a

$$a_1=\frac{P_1}{Q_1},\quad a_2=\frac{P_2}{Q_2},\quad a_3=\frac{P_4}{Q_4},\quad a_4=\frac{P_8}{Q_8}.$$

Toutes les fractions $\frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}, \ldots$ sont irréductibles, si a_1 et r sont premiers entre eux; si ces nombres ont pour plus grand commun diviseur d, les deux termes de $\frac{P_m}{Q_m}$ sont divisibles par d^{m-1}. Toutes ces fractions satisfont d'ailleurs à la condition

$$P_m^2 - nQ_m^n = (-r)^m = (P_1^2 - nQ_1^2)^m.$$

On peut vérifier, sur toutes les réduites formées, que l'on a

$$(a)\qquad \left\{\begin{array}{l} P_m - \sqrt{n}\,Q_m = (P_1 - \sqrt{n}\,Q_1)^m, \\ \text{et, par suite,} \\ P_m + \sqrt{n}\,Q_m = (P_1 + \sqrt{n}\,Q_1)^m. \end{array}\right.$$

On peut donc, dans chaque développement, égaler séparément les parties rationnelles et les parties irrationnelles. Cette loi subsistant pour les réduites déjà formées, il n'est pas douteux qu'elle ne subsiste aussi pour les autres, puisque la loi de formation reste la même (*).

Or des deux relations

$$P_m - \sqrt{n}\,Q_m = (P_1 - \sqrt{n}\,Q_1)^m$$

et

$$P_{2m} - \sqrt{n}\,Q_{2m} = (P_1 - \sqrt{n}\,Q_1)^{2m}$$

on tire

$$P_{2m} - \sqrt{n}\,Q_{2m} = (P_m - \sqrt{n}\,Q_m)^2,$$

d'où, en égalant séparément les parties rationnelles et les parties irrationnelles,

$$P_{2m} = P_m^2 + nQ_m^2,$$
$$Q_{2m} = 2P_m Q_m,$$
$$\frac{P_{2m}}{Q_{2m}} = \frac{P_m^2 + nQ_m^2}{2P_m Q_m}.$$

La réduite $\frac{P_{2m}}{Q_{2m}}$ se déduit donc de $\frac{P_m}{Q_m}$, d'après la même loi qu'un terme de la suite $a_2, a_3, \ldots$ se déduit du précédent ; donc, puisqu'on a

$$a_2 = \frac{P_2}{Q_2}, \quad a_3 = \frac{P_4}{Q_4}, \quad a_4 = \frac{P_8}{Q_8},$$

on aura, en général,

$$a_m = \frac{P_{2^{m-1}}}{Q_{2^{m-1}}}.$$

(*) On peut d'ailleurs vérifier qu'en exprimant P_{m-2}, P_{m-1}, P_m et Q_{m-2}, Q_{m-1}, Q_m en fonction de a_1 et r au moyen de l'une des formules (a), où $P_1 = a_1$, $Q_1 = 1$, et ayant égard à la relation $n = a_1^2 + r$, les formules

$$P_m = 2a_1 P_{m-1} + r P_{m-2} \quad \text{et} \quad Q_m = 2a_1 Q_{m-1} + r Q_{m-2}$$

se réduisent à des identités; donc les formules (a) sont générales.