V.-A. LE BESGUE

Sur les développements de sin na, cos na, suivant les puissances de 2 cos a et 2 sin a

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 425-431

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__425_0>

SUR LES DÉVELOPPEMENTS DE $\sin na$, $\cos na$, SUIVANT LES PUISSANCES DE $2\cos a$ ET $2\sin a$;

PAR M. V.-A. LE BESGUE.

I. Les identités

$$\sin(n+1)a = \sin na\, 2\cos a - \sin(n-1)a,$$
$$\cos(n-1)a = \cos na\, 2\cos a - \cos(n-1)a$$

montrent que, pour les arcs 0, a, $2a$, $3a, \ldots$, na, les sinus et cosinus forment des séries récurrentes, dont l'échelle de relation est $2\cos a - 1$; on peut donc, au moyen des deux premiers termes, calculer un terme quelconque. Voici, pour les sinus et cosinus, le calcul des premiers termes :

$$\begin{array}{ll}
2\sin 0 = 0, & 2\cos 0 = 2, \\
2\sin a = y, & 2\cos a = x, \\
2\sin 2a = yx, & 2\cos 2a = x^2 - 2, \\
2\sin 3a = y(x^2 - 1), & 2\cos 3a = x^3 - 3x, \\
2\sin 4a = y(x^3 - 2x), & 2\cos 4a = x^4 - 4x^2 + 2, \\
2\sin 5a = y(x^4 - 3x^2 + 1), & 2\cos 5a = x^5 - 5x^3 + 5x, \\
2\sin 6a = y(x^5 - 4x^3 + 3x), & 2\cos 6a = x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2, \\
2\sin 7a = y(x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1), & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\
2\sin 8a = y(x^7 - 6x^5 + 10x^2 - 4x), & \\
2\sin 9a = y(x^8 - 7x^6 + 15x^4 - 10x + 1), & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Pour simplifier, on a posé $2\cos a = x$ et, par analogie, $2\sin a = y$. C'est pour éviter les fractions que l'on a doublé les sinus et les cosinus. En calculant jusqu'à dix termes pour les sinus, on a mis en évidence la loi des signes, celle des exposants et celle des coefficients, qui sont des nombres figurés, etc., de sorte qu'en ayant égard au nombre de termes de chaque colonne, à partir de $2\sin a$, on voit de suite que l'on doit avoir

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} 2\sin na = y\Big[x^{n-1} - (n-2)x^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}x^{n-5} \\ - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}x^{n-7} + \ldots\Big]. \end{aligned}\right.$$

Dans les nombres figurés, on a renversé l'ordre des facteurs du numérateur, pour retrouver des formules données dans le n° 337 des *Recherches arithmétiques* de Gauss. On pourrait calculer de même $2\cos na$; mais il est plus court d'employer la formule

$$2\cos na = \frac{\sin(n+1)a}{y} - \frac{\sin(n-1)a}{y};$$

on trouve ainsi

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} 2\cos na = x^n - n x^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}x^{n-4} \\ - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}x^{n-6} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Comme on a $x^2 + y^2 = 4$, on pourrait changer la forme de ces formules; mais, comme a est quelconque, il est plus simple de changer a en $\frac{\pi}{2} - a$, en ayant égard au changement de $\sin n\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$, $\cos n\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$, et, pour cela, il faut considérer le cas de n impair, $n = 2m + 1$, et celui de n pair, $n = 2m$.

Le changement de a en $\frac{\pi}{2} - a$ change x en y et réciproquement : pour n impair, $\sin n\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ devient, en posant $n = 2m + 1$,

$$\sin\left(ma + \frac{\pi}{2} - na\right),$$

savoir, $\cos na$ pour m pair et $-\cos na$ pour m impair; pour $\cos n\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$, on trouve

$$+\sin na \quad \text{et} \quad -\sin na;$$

pour $n = 2m$,

$$\sin 2m\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(m\pi - na),$$

$$\cos 2m\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(m\pi - na).$$

Il y a donc, pour m pair, changement de signe du sinus, le cosinus restant le même; c'est le contraire pour m impair. On a donc ces quatre équations : 1° pour n impair

$$(3)\left\{\begin{aligned}&(-1)^{\frac{n-1}{2}} 2\cos na\\ &\quad = x\left[y^{n-1} - (n-2)y^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}y^{n-5} - \ldots\right],\end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2\sin na = y^n - ny^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}y^{n-4} - \ldots,$$

2° pour n pair

$$(5)\quad \pm 2\sin na = x[y^{n-1} - (n-2)y^{n-3} + \ldots],$$

$$(6)\quad \mp 2\cos na = y^n - ny^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}y^{n-4} + \ldots,$$

selon que $\frac{n}{2}$ est pair ou impair (*).

(*) Les équations (1), (2), (3), (4), (5), (6) ne sont qu'une simplification des formules de Cauchy; seulement, au lieu d'ordonner suivant les puissances de $\sin a$ et $\cos a$, j'ai ordonné suivant les puissances de $2a$ et $\cos a$. (*Voir* l'*Analyse algébrique* de Cauchy, ou la *Trigonométrie* de M. Serret.)

II. Passons aux équations de degré m qui, pour $n = 2m + 1$, donnent les sinus et les cosinus des arcs o, $\frac{2\pi}{n} = a, 2a, 3a, \ldots, (n-1)a$.

Ayant inscrit, dans un cercle de rayon 1, un polygone régulier de n côtés $A_0 A_1 A_2 \ldots A_m A_{m+1} \ldots A_{2m}$, on joindra le sommet A_0 avec le centre; on aura un axe de symétrie perpendiculaire au côté $A_m A_{m+1}$ du polygone. Si, par le centre, on mène une perpendiculaire à l'axe de symétrie, on voit de suite que les sommets symétriquement placés par rapport à cet axe auront le même cosinus et des sinus égaux et de signe contraire : pour A_0, le sinus sera o et le cosinus 1.

Pour avoir les doubles sinus y, ou les diagonales du polygone, aussi bien que le côté, on fera, dans l'équation (4), $\sin na = 2k\pi$, on divisera par y, et l'on prendra pour inconnue y^2; l'équation divisée par 2^n est précisément l'équation (I) du n° 337 des *Disquisitiones arithmeticæ* de Gauss.

L'équation (2), où l'on ferait $na = 2k\pi$, étant divisée par 2^n, donnerait l'équation (II) du n° 337 déjà cité; mais, comme l'équation (2) revient à $(x-2)P^2 = 0$, voici comment on trouvera l'équation $P = 0$.

On remarquera que

$$\sin(p-q)\sin(p+q) = \sin^2 p - \sin^2 q,$$

de sorte que, posant $p = (m+1)a$, $q = ma$, on aura

$$(a) \left\{ \begin{aligned} &\sin a \sin(2m+1)a \\ &\quad = [\sin(m+1)a + \sin ma][\sin(m+1)a - \sin ma]; \end{aligned} \right.$$

en posant $(2m+1)a = 2k\pi$, c'est donc

$$\sin(m+1)a + \sin ma = 0,$$

que l'on doit avoir. Les deux équations qui viennent d'être indiquées sont donc, pour le cas de $n = 2m + 1$,

$$(7) \qquad z^m - nz^{m-1} + \frac{n(n-3)}{1.2} z^{m-2} + \ldots \pm n = 0,$$

où z est le carré du côté et des diagonales,

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} x^m - (m-1)x^{m-2} + \dfrac{(m-2)(m-3)}{1.2} x^{m-4} + \ldots \\ + x^{m-1} - (m-2)x^{m-3} + \dfrac{(m-3)(m-4)}{1.2} x^{m-5} + \ldots = 0; \end{array} \right.$$

c'est l'équation $P = 0$, transformée au moyen de l'équation (1) et du théorème (a).

Il est à remarquer que, les racines de (8) étant $2\cos a$, $2\cos 2a, \ldots, 2\cos ma$, on aura

$$(b) \qquad 1 + 2\cos a + 2\cos 2a + \ldots + 2\cos ma = 0,$$

ce qui se démontre encore en projetant orthogonalement le périmètre du polygone régulier de $2m+1$ côtés sur un côté prolongé dans les deux sens; cela vient de ce que a est l'angle au centre du polygone, ou le supplément de l'angle à la circonférence.

III. Si l'on considérait l'identité

$$r^{k+1} + \frac{1}{r^{k+1}} = \left(r^k + \frac{1}{r^k}\right)\left(r + \frac{1}{r}\right) - \left(r^{k-1} + \frac{1}{r^{k-1}}\right),$$

on aurait une série récurrente dont l'échelle de relation serait $r + \frac{1}{r}$, -1. Si l'on posait $r + \frac{1}{r} = x$, comme on a $r^0 + \frac{1}{r^0} = 2$, on trouverait, comme pour la série des cosinus $0, a, 2a, \ldots,$

$$r^n + \frac{1}{r^n} = x^n - nx^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2} x^{n-4} - \ldots.$$

Pour identifier cette équation avec l'équation (2), il faudrait poser

$$r + \frac{1}{r} = 2\cos a,$$

ou

$$r^2 - 2r\cos a + 1 = 0,$$

$$r = \cos a + \sin a\sqrt{-1}, \quad \frac{1}{r} = \cos a - \sin a\sqrt{-1},$$

on aurait

$$r^k + \frac{1}{r^k} = 2\cos ka,$$

et l'équation (b) donnerait

$$1 + r + \frac{1}{r} + r^2 + \frac{1}{r^2} + \ldots + r^m + \frac{1}{r^m} = 0,$$

ou

$$r^{2m} + r^{2m-1} + \ldots + r + 1 = \frac{r^{2m+1} - 1}{r - 1} = 0,$$

ou encore

$$(r^2 - 2r\cos a + 1)(r^2 - 2r\cos 2a + 1)\ldots(r^2 - 2r\cos ma - 1) = 0.$$

Comme des équations

$$r = \cos a + \sin a\sqrt{-1}, \quad \frac{1}{r} = \cos a - \sin a\sqrt{-1}$$

on tire

$$2\cos a = \frac{r^2 + 1}{r},$$

$$2\sin a = \frac{1 - r^2}{r}\sqrt{-1}, \quad \operatorname{tang} a = \frac{1 - r^2}{1 + r^2}\sqrt{-1},$$

on peut, comme le fait Gauss, ramener la détermination de $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{tang} a$, à la résolution de $r^n - 1 = 0$.

Dans le nº 337, dont j'ai voulu faire ici un petit commentaire, on trouve l'équation de degré impair dont les racines sont les tangentes des arcs $k\frac{2\pi}{n}$:

$$x^n - \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^{n-2} - \ldots \pm nx = 0;$$

elle se tire de la formule générale

$$\operatorname{tang} na = \frac{nx - \frac{n(n-1)(n-3)}{1.2.3}x^3 + \ldots}{1 - \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \ldots} \quad (x = \operatorname{tang} a),$$

où l'on retrouve les coefficients binomiaux. Cette formule se démontre par la méthode dite *de proche en proche*, en partant de l'équation

$$\operatorname{tang} 2a = \frac{2x}{1-x^2}, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang} 3a = \frac{3x - x^3}{1-3x^2}, \ldots$$

Remarque. — Pour $p = 17$, l'équation (8) est

$$x^8 + x^7 - 7x^6 - 6x^5 + 15x^4 + 10x^3 - 10x^2 - 4x + 1 = 0;$$

les racines sont, en posant $\frac{2\pi}{17} = \omega$, les suivantes : $2\cos\omega$, $2\cos 2\omega, \ldots, 2\cos 8\omega$. Gauss a donné la première dans le n° 365 des *Disquisitiones*; j'ai donné les autres (avec deux erreurs de signe) dans le tome V de la première série des *Nouvelles Annales*. Je profite de l'occasion pour les rectifier.

Dans les équations suivantes :

$$A = 34 - 2\sqrt{17}, \quad B = 34 + 2\sqrt{17}, \quad AB = 64.17,$$

le signe + du radical principal (qui est multiplié par 2) appartient au premier cosinus placé dans le premier membre, le signe — appartient au second cosinus :

$$16\cos\omega, \quad 16\cos 4\omega$$
$$= -1 + \sqrt{17} + \sqrt{A} \pm 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - (\sqrt{A} + 2\sqrt{B})},$$
$$16\cos 2\omega, \quad 16\cos 8\omega$$
$$= -1 + \sqrt{17} + \sqrt{A} \pm 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} + (\sqrt{A} + 2\sqrt{B})},$$
$$16\cos 3\omega, \quad 16\cos 5\omega$$
$$= -1 - \sqrt{17} + \sqrt{B} \pm 2\sqrt{17 - 3\sqrt{17} - (\sqrt{B} - 2\sqrt{A})},$$
$$16\cos 6\omega, \quad 16\cos 7\omega$$
$$= -1 - \sqrt{17} - \sqrt{B} \pm 2\sqrt{17 - 3\sqrt{17} + (\sqrt{B} - 2\sqrt{A})}.$$

On en tirera facilement le carré du côté et des diagonales du polygone régulier de 17 côtés.