E. CATALAN

Sur l'intégration des différentielles rationnelles

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 423-424

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__423_0>

SUR L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES RATIONNELLES;

PAR M. E. CATALAN.

Tous les Traités de Calcul intégral contiennent la for mule de *réduction*

$$(A)\qquad Z_p = \frac{2p-3}{2p-2} Z_{p-1} + \frac{z}{(2p-2)(1+z^2)^{p-1}},$$

dans laquelle

$$Z_p = \int \frac{dz}{(1+z^2)^p} \;(*).$$

A cause de $Z_0 = \operatorname{arc\,tang} z$, cette formule fait connaître successivement $z_1, z_2, \ldots$. Mais il y a plus : on en peut conclure, par un calcul très-simple, la valeur générale de Z_p (**).

En effet, il est visible que

$$(B)\qquad Z_p = a \operatorname{arc\,tang} z + \sum_1^{p-1} a_i \frac{z}{(1+z^2)^i},$$

$a, a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ étant des coefficients inconnus. Prenant les dérivées, on a donc

$$(C)\qquad \frac{1}{(1+z^2)^p} = a \frac{1}{1+z^2} + \sum_1^{p-1} a_i \left[\frac{z}{(1+z^2)^i}\right]'.$$

On tire de l'égalité (A)

$$\left[\frac{z}{(1+z^2)^i}\right]' = 2i \frac{1}{(1+z^2)^{i+1}} - (2i-1) \frac{1}{(1+z^2)^i},$$

(*) *Voir*, par exemple, le *Cours d'Analyse de l'Université de Liége*.
(**) Abstraction faite, bien entendu, de la constante arbitraire.

de sorte que (C) devient

$$\frac{1}{(1+z^2)^p}=a\frac{1}{1+z^2}+\sum_1^{p-1}2ia_i\frac{1}{(1+z^2)^{i+1}}-\sum_1^{p-1}(2i-1)a_i\frac{1}{(1+z^2)^i},$$

ou

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+z^2)^p}=(a-a_1)\frac{1}{1+z^2}+(2a_1-3a_2)\frac{1}{(1+z^2)^2}\\ +(4a_2-5a_3)\frac{1}{(1+z^2)^3}+\ldots\\ +[(2p-4)a_{p-2}-(2p-3)a_{p-1}]\frac{1}{(1-z^2)^{p-1}}\\ +(2p-2)a_{p-1}\frac{1}{(1+z^2)^p}.\end{aligned}$$

Identifiant les deux membres, on trouve

$$\text{(D)}\quad\left\{\begin{aligned}a_{p-1}&=\frac{1}{2p-2},\\ a_{p-2}&=\frac{2p-3}{(2p-2)(2p-4)},\\ a_{p-3}&=\frac{(2p-3)(2p-5)}{(2p-2)(2p-4)(2p-6)},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ a_1=a&=\frac{3.5\ldots(2p-3)}{2.4.6\ldots(2p-2)}.\end{aligned}\right.$$

Soit, comme application, $p=5$. D'après les formules (B) et (D),

$$\begin{aligned}\int\frac{dz}{(1+z^2)^5}=\frac{3.5.7}{2.4.6.8}\operatorname{arc\,tang}z+\frac{3.5.7}{2.4.6.8}\frac{z}{1+z^2}\\ +\frac{5.7}{4.6.8}\frac{z}{(1+z^2)^2}+\frac{7}{6.8}\frac{z}{(1+z^2)^3}\\ +\frac{1}{8}\frac{z}{(1+z^2)^4}+\text{const.}\end{aligned}$$