MOURGUE

Expressions de $\sin ma$ et $\cos ma$ en fonction de $\sin a$ ou $\cos a$ seulement

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 408-417

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__408_1>

EXPRESSIONS DE $\sin ma$ ET $\cos ma$ EN FONCTION DE $\sin a$ OU $\cos a$ SEULEMENT;

PAR M. MOURGUE.

On se propose de déduire ces expressions des formules ordinaires

$$\sin ma = 2\cos a \sin(m-1)a - \sin(m-2)a,$$
$$\cos ma = 2\cos a \cos(m-1)a - \cos(m-2)a.$$

I.

Ces expressions sont une conséquence du théorème suivant :

THÉORÈME. — *Lorsque trois termes consécutifs de la suite indéfinie* $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \ldots$ *sont liés par la relation* $A_n = KA_{n-1} - A_{n-2}$, *où* K *désigne une quantité fixe, un terme quelconque a pour valeur*

$$A_m = \left[K^{m-1} - \frac{m-2}{1}K^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{1.2}K^{m-5} - \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3}K^{m-7}\ldots\right]A_1$$
$$- \left[K^{m-2} - \frac{m-3}{1}K^{m-4} + \frac{(m-4)(m-5)}{1.2}K^{m-6} - \frac{(m-5)(m-6)(m-7)}{1.2.3}K^{m-8}\ldots\right]A_0,$$

formule dans laquelle les premiers facteurs des numérateurs sont des entiers successifs décroissants.

En effet, les premières applications de la relation énoncée donnent

$$A_2 = KA_1 - A_0,$$
$$A_3 = (K^2 - 1)A_1 - KA_0,$$
$$A_4 = (K^3 - 2K)A_1 - (K^2 - 1)A_0.$$

Je dis que, en continuant les calculs indéfiniment :

1° Les seconds membres des égalités resteront des fonctions linéaires de A_1 et A_0 ;

2° Le coefficient de A_0 dans une égalité restera égal et de signe contraire à celui de A_1 dans l'égalité précédente ;

3° Les coefficients P_{n-2}, P_{n-1}, P_n de A_1, dans trois égalités consécutives, auront entre eux la même relation que les premiers membres, savoir :

$$P_n = KP_{n-1} - P_{n-2}.$$

Pour le démontrer, admettons que deux égalités consécutives vérifient 1° et 2° :

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} A_{n-1} = P_{n-2}A_1 - P_{n-3}A_0, \\ A_n \quad = P_{n-1}A_1 - P_{n-2}A_0. \end{cases}$$

De la seconde on déduit

$$A_{n+1} = P_{n-1}A_2 - P_{n-2}A_1,$$

d'où, en remplaçant A_2 par sa valeur,

$$(6)\qquad \begin{cases} A_{n+1} = (P_{n-1}K - P_{n-2})A_1 - P_{n-1}A_0 \\ \text{et, par suite,} \\ P_n = P_{n-1}K - P_{n-2}. \end{cases}$$

La comparaison des égalités (α) et (6) met en évidence 1°, 2° et 3°.

Remarque. — En vertu de 2°, pour avoir un terme quelconque de la suite A_2, A_3, A_4, A_5, ..., il suffira de trouver la loi des coefficients de A_1.

Loi de formation des coefficients de A_1. — La relation $P_n = KP_{n-1} - P_{n-2}$ donne, pour les premiers coefficients de A_1, le tableau suivant :

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} P_0 = 1, \\ P_1 = K, \\ P_2 = K^2 - 1, \\ P_3 = K^3 - 2K, \\ P_4 = K^4 - 3K^2 + 1, \\ P_5 = K^5 - 4K^3 + 3K. \end{cases}$$

(On a mis en tête l'égalité conventionnelle $P_0 = 1$ pour faciliter les énoncés ultérieurs.)

Dans ce tableau indéfiniment prolongé :

1° Les seconds membres seront des fonctions alternées de puissances descendantes et de même parité de K;

2° En ce qui concerne les valeurs absolues, le coefficient d'une puissance de K s'obtient en ajoutant celui qui le surmonte d'un rang au voisin de gauche de celui qui le surmonte de deux rangs.

3° Cette règle se transforme en la suivante :

Un coefficient placé dans une colonne verticale (sauf la première), et appartenant à la $n^{ième}$ ligne horizontale, est égal à la somme des coefficients de la colonne précédente, arrêtée à la $(n-2)^{ième}$ ligne horizontale.

Pour le démontrer, admettons que deux égalités consécutives du tableau vérifient 1° :

$$P_{n-2} = K^{n-2} - a_{n-2} K^{n-4} + b_{n-2} K^{n-6} - c_{n-2} K^{n-8} \ldots,$$
$$P_{n-1} = K^{n-1} - a_{n-1} K^{n-3} + b_{n-1} K^{n-5} - c_{n-1} K^{n-7} \ldots.$$

D'après la relation $P_n = KP_{n-1} - P_{n-2}$, on en déduit

$$(\gamma)\quad \left\{\begin{array}{l} P_n = K^n - (a_{n-1}+1) K^{n-2} + (b_{n-1} + a_{n-2}) K^{n-4} \\ \qquad - (c_{n-1} + b_{n-2}) K^{n-6} \ldots, \\ \text{et par suite} \\ a_n = a_{n-1} + 1, \quad b_n = b_{n-1} + a_{n-2}, \quad c_n = c_{n-1} + b_{n-2}, \ldots, \end{array}\right.$$

ce qui met en évidence 1° et 2°.

Enfin, des égalités

$$b_n = b_{n-1} + a_{n-2}, \quad b_{n-1} = b_{n-2} + a_{n-3}, \quad b_{n-2} = b_{n-3} + a_{n-4} \ldots,$$

on déduit, par addition,

$$b_n = a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4} + a_{n-5} + \ldots,$$

et de même

$$c_n = b_{n-2} + b_{n-3} + b_{n-4} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ce qui établit 3°.

Cela posé, dans la $m^{ième}$ égalité du tableau (1), savoir :

$$P_{m-1} = K^{m-1} - a_{m-1}K^{m-3} + b_{m-1}K^{m-5} - c_{m-1}K^{m-7}\ldots,$$

on aura, d'après 3°,

$$a_{m-1} = 1+1+1+1+\ldots = \frac{m-2}{1},$$

$$b_{m-1} = \frac{m-4}{1} + \frac{m-5}{1} + \frac{m-6}{1} + \ldots = \frac{(m-3)(m-4)}{1.2},$$

$$c_{m-1} = \frac{(m-5)(m-6)}{1.2} + \frac{(m-6)(m-7)}{1.2} + \ldots$$

$$= \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2\,3},$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots;$$

et comme

$$A_m = P_{m-1}A_1 + P_{m-2}A_0,$$

on aura finalement

$$A_m = \left[K^{m-1} - \frac{m-2}{1}K^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{1.2}K^{m-5} - \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3}K^{m-7} + \ldots\right]A_1$$
$$- \left[K^{m-2} - \frac{m-3}{1}K^{m-4} + \frac{(m-4)(m-5)}{1.2}K^{m-6} - \frac{(m-5)(m-6)(m-7)}{1.2.3}K^{m-8} + \ldots\right]A_0.$$

II.

1° Puisque $\sin ma$, $\sin(m-1)a$, $\sin(m-2)a$ sont liés par la relation

$$\sin ma = K\sin(m-1)a - \sin(m-1)a, \quad \text{où} \quad K = 2\cos a,$$

en posant, dans l'égalité précédente,

$$A_m = \sin ma, \quad A_1 = \sin a, \quad A_0 = 0, \quad K = 2\cos a,$$

il vient

$$(S) \left\{ \begin{aligned} \frac{\sin ma}{\sin a} &= (2\cos a)^{m-1} - \frac{m-2}{1}(2\cos a)^{m-3} \\ &+ \frac{(m-3)(m-4)}{1.2}(2\cos a)^{m-5} \\ &- \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3}(2\cos a)^{m-7}\ldots, \end{aligned} \right.$$

formule que donne $\sin ma$ en fonction de $\cos a$ pour toute valeur entière de m.

En y remplaçant a par $\frac{\pi}{2} - a$, le premier membre devient

$$\left.\begin{aligned} &+\frac{\sin ma}{\cos a}, \\ &-\frac{\sin ma}{\cos a}, \end{aligned}\right\} \text{pour} \quad m = \left\{ \begin{aligned} &4p+2, \\ &4p, \end{aligned}\right.$$

et

$$\left.\begin{aligned} &+\frac{\cos ma}{\cos a}, \\ &-\frac{\cos ma}{\cos a}, \end{aligned}\right\} \text{pour} \quad m = \left\{ \begin{aligned} &4p+1, \\ &4p-1. \end{aligned}\right.$$

Donc on aura, pour *m pair*,

$$(S_2) \left\{ \begin{aligned} &(\sqrt{-1})^{m+2}\frac{\sin ma}{\cos a} \\ &= (2\sin a)^{m-1} - \frac{m-1}{1}(2\sin a)^{m-3} \\ &+ \frac{(m-3)(m-4)}{1.2}(2\sin a)^{m-5} \\ &- \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3}(2\sin a)^{m-7}\ldots, \end{aligned} \right.$$

et, pour *m impair*,

$$
(\mathrm{C}_1)\left\{
\begin{aligned}
&(\sqrt{-1})^{m-1}\frac{\cos ma}{\cos a}\\
&\quad=(2\sin a)^{m-1}-\frac{m-2}{1}(2\sin a)^{m-3}\\
&\qquad+\frac{(m-3)(m-4)}{1.2}(2\sin a)^{m-5}\\
&\qquad-\frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3}(2\sin a)^{m-7}\ldots,
\end{aligned}\right.
$$

2° Si, dans l'égalité qui donne A_m, on pose

$$A_m=\cos ma,\quad A_1=\cos a,\quad A_0=1,\quad K=2\cos a,$$

il vient, en doublant les deux membres,

$$
\begin{aligned}
2\cos ma=(2\cos a)^m&-\frac{m-2}{1}(2\cos a)^{m-2}\\
&+\frac{(m-3)(m-4)}{1.2}(2\cos a)^{m-4}\\
&-\frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3}(2\cos a)^{m-6}+\ldots\\
&-2(2\cos a)^{m-2}+2\frac{m-3}{2}(2\cos a)^{m-4}\\
&-2\frac{(m-4)(m-5)}{1.2}(2\cos a)^{m-6}+\ldots.
\end{aligned}
$$

Or

$$
\begin{aligned}
&\frac{(m-p-1)(m-p-2)\ldots(m-2p)}{1.2\ldots p}\\
&\quad+2\frac{(m-p-1)\ldots(m-2p+1)}{1\ldots(p-1)}\\
&\quad=\frac{m(m-p-1)\ldots(m-2p+1)}{1.2\ldots p};
\end{aligned}
$$

donc

$$2\cos ma = (2\cos a)^m - \frac{m}{1}(2\cos a)^{m-2} + \frac{m}{1}\frac{m-3}{2}(2\cos a)^{m-4}$$
$$- \frac{m}{1}\frac{(m-4)(m-5)}{2.3}(2\cos a)^{m-6}$$
$$+ \frac{m}{1}\frac{(m-5)(m-6)(m-7)}{2.3.4}(2\cos a)^{m-8} + \ldots.$$

En divisant les deux membres par $2\cos a$, on obtient

$$(\mathrm{C})\left\{\begin{aligned}\frac{\cos ma}{\cos a} = (2\cos a)^{m-1} &- \frac{m}{1}(2\cos a)^{m-3}\\ &+ \frac{m}{1}\frac{m-3}{2}(2\cos a)^{m-5}\\ &- \frac{m}{1}\frac{(m-4)(m-5)}{2.3}(2\cos a)^{m-7}\\ &+ \frac{m}{1}\frac{(m-5)(m-6)(m-7)}{2.3.4}(2\cos a)^{m-9} + \ldots,\end{aligned}\right.$$

formule qui donne $\cos ma$ en fonction de $\cos a$ pour m entier pair ou impair. En y remplaçant a par $\frac{\pi}{2} - a$, le premier membre devient

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{\sin ma}{\sin a},\\ &+\frac{\sin ma}{\sin a},\end{aligned}\right\} \text{ pour } m = \left\{\begin{aligned}&4p-1,\\ &4p+1,\end{aligned}\right.$$

et

$$\left.\begin{aligned}&+\frac{\cos ma}{\sin a},\\ &-\frac{\cos ma}{\sin a},\end{aligned}\right\} \text{ pour } m = \left\{\begin{aligned}&4p,\\ &4p+2;\end{aligned}\right.$$

donc, pour m *impair*,

$$(\mathrm{S}_1)\left\{\begin{aligned}(\sqrt{-1})^{m-1}\frac{\sin ma}{\sin a} = (2\sin a)^{m-1} &- \frac{m}{1}(2\sin a)^{m-3}\\ &+ \frac{m}{1}\frac{m-3}{2}(2\sin a)^{m-5}\\ &- \frac{m}{1}\frac{(m-4)(m-5)}{1.2}(2\sin a)^{m-7} + \ldots,\end{aligned}\right.$$

et, pour *m pair,*

$$(\mathrm{C}_2)\left\{\begin{aligned}(\sqrt{-1})^m\frac{\cos ma}{\sin a} &= (2\sin a)^{m-1}-\frac{m}{1}(2\sin a)^{m-3}\\ &+\frac{m}{1}\,\frac{m-3}{2}(2\sin a)^{m-5}\\ &-\frac{m}{1}\,\frac{(m-4)(m-3)}{1.2}(2\sin a)^{m-7}+\ldots.\end{aligned}\right.$$

III.

Le même théorème donne la valeur de $x^m - \frac{1}{x^m}$ et de $x^m + \frac{1}{x^m}$, en fonction de $x + \frac{1}{x}$.

Puisque

$$x^m - \frac{1}{x^m} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^{m-1} - \frac{1}{x^{m-1}}\right) - \left(x^{m-2} - \frac{1}{x^{m-2}}\right),$$

en posant

$$A_m = x^m - \frac{1}{x^m},\quad A_1 = x - \frac{1}{x},\quad A_0 = x^0 - \frac{1}{x^0} = 0$$

et

$$K = x + \frac{1}{x},$$

on aura,

$$\frac{x^m - \frac{1}{x^m}}{x - \frac{1}{x}} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{m-1} - \frac{m-2}{1}\left(x + \frac{1}{x}\right)^{m-3}$$
$$+ \frac{(m-3)(m-4)}{1.2}\left(x + \frac{1}{x}\right)^{m-5} - \ldots$$

De même, ayant

$$x^m + \frac{1}{x^m} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right) - \left(x^{m-2} + \frac{1}{x^{m-2}}\right),$$

en posant .

$$A_m = x^m + \frac{1}{x^m},\quad A_1 = x + \frac{1}{x},\quad A_0 = x^0 + \frac{1}{x_0} = 2$$

et

$$K = x + \frac{1}{x},$$

on aura

$$\begin{aligned} x^m + \frac{1}{x^m} = & \left(x + \frac{1}{x}\right)^m - \frac{m}{1}\left(x + \frac{1}{x}\right)^{m-2} \\ & + \frac{m}{1}\,\frac{m-3}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)^{m-4} \\ & - \frac{m}{1}\,\frac{(m-3)(m-5)}{1.2}\left(x + \frac{1}{x}\right)^{m-6} + \ldots . \end{aligned}$$

Nota. — Dans la formule qui donne $2\cos ma$, on a divisé les deux membres par $2\cos a$, pour donner la même physionomie à toutes les formules. Comme le second membre n'est divisible par $2\cos a$ que dans le cas de m impair, il en résulte que, dans le cas de m pair, le dernier terme de la formule suivante contiendra $2\cos a$, avec l'exposant -1.

Par exemple,

$$\begin{aligned} \frac{\cos 8a}{\cos a} = & (2\cos a)^7 - \frac{8}{1}(2\cos a)^5 + \frac{8}{1}\,\frac{5}{3}(2\cos a)^3 \\ & - \frac{8}{1}\,\frac{4.3}{2.3}(2\cos a)^1 + \frac{8}{1}\,\frac{3.2\ 1}{2.3.4}(2\cos a)^{-1}, \end{aligned}$$

d'où

$$\cos 8a = 128\cos^8 a - 256\cos^6 a + 160\cos^4 a - 32\cos^2 a + 1.$$