NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Note sur un problème de géométrie analytique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 401-408

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__401_1>

NOTE SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE (*);

PAR M. L. P.

Trouver le lieu des sommets des triangles de périmètre constant formés par deux tangentes à une ellipse donnée, et la corde des contacts.

1. *Lemme.* — « Si d'un point M, (x, y) du plan, on mène la tangente MT à l'ellipse, et que OD soit le diamètre parallèle à cette tangente, on a

$$\frac{\overline{\mathrm{MT}}^2}{\overline{\mathrm{OD}}^4} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1,$$

en supposant que l'équation de l'ellipse est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. »$$

Cette proposition, plus ou moins connue, est une conséquence immédiate du théorème général suivant, dû à Newton :

« Si par deux points O et O′ on mène deux sécantes

(*) *Voir* question 552, t. XIX, 1re série, p. 406.

quelconques parallèles qui coupent une courbe aux points R_1, R_2,...; R'_1, R'_2,..., respectivement, on a

$$\frac{OR_1 . OR \ldots}{O'R'_1 . O'R'_2 \ldots} = \text{const.} \text{ »}$$

On démontre facilement que, si $f(x, y) = 0$ est l'équation de la courbe, et que x_0, y_0, x'_0, y'_0 soient les coordonnées des points O et O′, on a

$$\frac{OR_1 . OR_2 . OR_3 \ldots}{O'R'_1 . O'R'_2 . O'R'_3 \ldots} = \frac{f(x_0, y_0)}{f(x'_0, y'_0)}.$$

De là résulte la proposition énoncée.

2. Soient maintenant MA, MB les deux tangentes à l'ellipse, A et B les points de contact, φ et φ_1 les paramètres angulaires de ces points, x et y les coordonnées du point M, on a

$$(1) \quad \begin{cases} \overline{AB} = \sqrt{a^2 (\cos\varphi - \cos\varphi_1)^2 + b^2 (\sin\varphi - \sin\varphi_1)^2}, \\ \overline{MA} = \sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1}\ \sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}, \\ \overline{MB} = \sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1}\ \sqrt{a^2 \sin^2\varphi_1 + b^2 \cos^2\varphi_1}. \end{cases}$$

La droite AB, qui passe par les deux points A et B, et qui est aussi la polaire du point M, peut être représentée par l'une ou l'autre des équations suivantes :

$$\frac{X}{a} \cos\frac{\varphi + \varphi_1}{2} + \frac{Y}{b} \sin\frac{\varphi + \varphi_1}{2} = \cos\frac{\varphi_1 - \varphi}{2},$$

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = 1;$$

d'où il suit, en identifiant,

$$(2) \quad \cos\frac{\varphi_1 + \varphi}{2} = \frac{x}{a} \cos\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}, \quad \sin\frac{\varphi_1 + \varphi}{2} = \frac{y}{b} \cos\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}.$$

3. Si maintenant on pose

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} & D = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad H = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = D - 1, \\ & E = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}, \end{aligned} \right.$$

les relations (2) donnent immédiatement

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} & \cos\frac{\varphi_1 - \varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{D}}, \quad \cos\frac{\varphi_1 + \varphi}{2} = \frac{x}{a}\frac{1}{\sqrt{D}}, \\ & \sin\frac{\varphi_1 - \varphi}{2} = \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{D}}, \quad \sin\frac{\varphi_1 + \varphi}{2} = \frac{y}{b}\frac{1}{\sqrt{D}}; \end{aligned} \right.$$

on peut toujours, pour abréger la discussion relative aux signes des radicaux, supposer x et y positifs, et φ_1 algébriquement plus grand que φ.

Des relations (4) on déduit encore

$$\sin(\varphi_1 + \varphi) = \frac{\frac{2xy}{ab}}{D}, \quad \cos(\varphi_1 + \varphi) = \frac{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}{D},$$

$$\sin(\varphi_1 - \varphi) = \frac{2\sqrt{H}}{D}, \quad \cos(\varphi_1 - \varphi) = \frac{1 - H}{D};$$

d'où

$$\sin\varphi_1 \cos\varphi + \sin\varphi \cos\varphi_1 = \frac{\frac{2xy}{ab}}{D},$$

$$\sin\varphi_1 \cos\varphi - \sin\varphi \cos\varphi_1 = \frac{2\sqrt{H}}{D},$$

$$\cos\varphi_1 \cos\varphi - \sin\varphi_1 \sin\varphi = \frac{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}{D},$$

$$\cos\varphi_1 \cos\varphi + \sin\varphi_1 \sin\varphi = \frac{1 - H}{D},$$

et, par conséquent,

$$(5)\quad \begin{cases} \sin\varphi_1\cos\varphi = \dfrac{\dfrac{xy}{ab}+\sqrt{\text{H}}}{\text{D}}, & \cos\varphi_1\cos\varphi = \dfrac{1-\dfrac{x^2}{a^2}}{\text{D}}. \\[2ex] \sin\varphi\cos\varphi_1 = \dfrac{\dfrac{xy}{ab}-\sqrt{\text{H}}}{\text{D}}, & \sin\varphi_1\sin\varphi = \dfrac{1-\dfrac{y^2}{b^2}}{\text{D}}. \end{cases}$$

On déduit de là, en ajoutant la somme des carrés de ces dernières égalités, prises deux à deux et convenablement choisies,

$$(6)\quad \begin{cases} \text{D}^2\cos^2\varphi = \left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\sqrt{\text{H}}\right)^2, & \text{D}^2\cos^2\varphi_1 = \left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\sqrt{\text{H}}\right)^2, \\[2ex] \text{D}^2\sin^2\varphi = \left(\dfrac{y}{b}-\dfrac{x}{a}\sqrt{\text{H}}\right)^2, & \text{D}^2\sin^2\varphi_1 = \left(\dfrac{y}{b}+\dfrac{x}{a}\sqrt{\text{H}}\right)^2. \end{cases}$$

4. Ces formules établies, on trouve d'abord, eu égard aux relations (4),

$$\overline{\text{AB}} = \frac{2\sqrt{\text{H}}}{\sqrt{\text{D}}}\sqrt{a^2\sin^2\frac{\varphi_1+\varphi}{2}+b^2\cos^2\frac{\varphi+\varphi_1}{2}}.$$

On a donc les valeurs suivantes :

$$(7)\quad \begin{cases} \overline{\text{MA}} = \sqrt{\text{H}}\sqrt{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}, \\ \overline{\text{MB}} = \sqrt{\text{H}}\sqrt{a^2\sin^2\varphi_1+b^2\cos^2\varphi_1}, \\ \overline{\text{AB}} = \dfrac{2\sqrt{\text{H}}}{\sqrt{\text{D}}}\sqrt{a^2\sin^2\dfrac{\varphi+\varphi_1}{2}+b^2\cos^2\dfrac{\varphi+\varphi_1}{2}}. \end{cases}$$

Ces formules, qui offrent une analogie assez remarquable, peuvent conduire à des relations intéressantes; nous n'indiquerons que celles qui sont utiles au calcul que nous avons en vue.

En ayant égard aux relations (4), (5) ou (6), on trouve très-facilement

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\overline{AB} = \frac{2ab\sqrt{H}\sqrt{E}}{D},\\ &\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = \frac{2H}{D^2}[H(x^2+y^2) + a^2b^2E],\\ &\overline{MA}.\overline{MB} = \frac{H}{D}\sqrt{(x^2+y^2)^2 - 2c^2(x^2-y^2) + c^4},\end{aligned}\right.$$

où

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

5. Maintenant la recherche de l'équation du lieu demandé ne présente plus de difficulté. D'après la définition de ce lieu, on doit avoir

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{AB} = 2p,$$

$2p$ étant la valeur constante du périmètre.

On a d'abord, en remplaçant $\overline{AB}$ par sa valeur,

$$(9)\qquad \overline{MA} + \overline{MB} = 2p - \frac{2ab}{D}\sqrt{H}\sqrt{E};$$

puis, élevant au carré en ayant égard aux relations (8) et opérant quelques réductions visibles,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &+H\sqrt{(x^2+y^2)^2 - 2c^2(x^2-y^2) + c^4}\\ &= 2p^2D - 4abp\sqrt{H}\sqrt{E} - H(x^2+y^2-a^2-b^2).\end{aligned}\right.$$

Élevant encore au carré, on a

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &-a^2b^2H^3 - p^2H[D(x^2+y^2-a^2-b^2) - 4a^2b^2E] + p^4D^2\\ &= 2abp[H(x^2+y^2-a^2-b^2) - 2p^2D]\sqrt{H}\sqrt{E}.\end{aligned}\right.$$

D'où l'on conclut définitivement, pour l'*équation rationnelle du lieu* :

$$((12))\quad \begin{cases} \{a^2b^2H^3+p^2H[D(x^2+y^2-a^2-b^2)-4a^2b^2E]-p^4D^2\}^2 \\ \qquad = 4a^2b^2p^2HE[H(x^2+y^2-a^2-b^2)-2p^2D]^2, \end{cases}$$

équation dans laquelle on a posé

$$(12\ bis)\quad \begin{cases} D=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}; \quad H=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=D-1, \\ \qquad E=\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}. \end{cases}$$

6. Les équations qui précèdent donnent lieu à plusieurs remarques qu'il est bon de noter.

Nous voyons, par l'équation (9), qu'on doit avoir

$$\frac{ab\sqrt{H}\sqrt{E}}{D}<p,$$

c'est-à-dire que les points de la courbe, pour lesquels la somme des valeurs absolues des côtés du triangle est égale à $2p$, sont dans l'intérieur de la courbe

$$ab\sqrt{H}\sqrt{E}=pD.$$

Ainsi 1° : *Les points du lieu, pour lesquels la somme des valeurs absolues des côtés du triangle* MAB *est égale à $2p$, sont dans l'intérieur de la courbe*

$$(13)\quad \left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^2}\right)\left[\frac{x^2}{a^4}\left(1-\frac{p^2}{b^2}\right)+\frac{y^2}{b^4}\left(1-\frac{p^2}{a^2}\right)\right]=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4};$$

c'est une courbe du quatrième ordre.

L'équation (10) nous montre que, dans la somme

$$\overline{MA}+\overline{MB}\pm\overline{AB}=2p,$$

les deux tangentes MA et MB y entreront par leur somme ou par leur différence, suivant que la quantité

$$2p^2D-H(x^2+y^2-a^2-b^2)\pm 4abp\sqrt{H}\sqrt{E}$$

est positive ou négative, le signe — ou + correspondant au cas où le côté AB est ajouté ou retranché; par suite :

2° *Les points du lieu* ((12)), *pour lesquels les deux tangentes* MA, MB *entrent, dans la somme* $2p$, *par la somme de leurs valeurs absolues ou par leur différence, sont séparés par la courbe*

$$(14)\qquad [\mathrm{H}(x^2+y^2-a^2-b^2)-2p^2\mathrm{D}^2] = 16a^2b^2p^2\mathrm{HE};$$

c'est une courbe du huitième ordre.

3° *Quant au côté* AB, *nous voyons*, par l'équation (11), *qu'il s'ajoutera à la somme algébrique des tangentes ou s'en retranchera, suivant que les premiers membres des deux équations suivantes* :

$$(15)\qquad \mathrm{H}(x^2+y^2-a^2-b^2)-2p^2\mathrm{D}=0,$$

$$(16)\qquad -a^2b^2\mathrm{H}^3-p^2\mathrm{H}[\mathrm{D}(x^2+y^2-a^2-b^2)-4a^2b^2\mathrm{E}]+p^4\mathrm{D}^2=0,$$

sont de mêmes signes ou de signes contraires.

La courbe (15) est du quatrième ordre, la courbe (16) est du sixième ordre.

7. Le problème posé est donc résolu, en ce sens que nous avons obtenu l'équation rationnelle du lieu; mais il reste une partie intéressante que nous n'aborderons pas, c'est la discussion de cette équation et la construction de la courbe; cette étude, très-longue, n'est pas d'ailleurs sans difficulté.

On peut cependant remarquer que des relations

$$(17)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\mathrm{D},\qquad \frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=\mathrm{E}$$

on déduit

$$(18)\qquad x^2=\frac{a^4}{c^2}(\mathrm{D}-b^2\mathrm{E}),\qquad y^2=\frac{b^4}{c^2}(-\mathrm{D}+a^2\mathrm{E}),$$

d'où

$$(18\ bis)\qquad x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)D - a^2b^2E.$$

Si, dans l'équation (12), on remplace $(x^2 + y^2)$ par sa valeur (18 *bis*), dans les termes où cette somme est en évidence, et qu'on pose

$$(19)\qquad HE = u,$$

l'équation résultante sera du troisième degré en u : la difficulté de la discussion se trouve donc considérablement réduite.

Quant aux courbes de séparation (13), (14), (15), (16), leur construction peut parfaitement s'effectuer; seulement, pour les courbes (14) et (16), il faudra avoir recours au procédé que nous venons d'indiquer.

Nous ajouterons encore quelques remarques.

La courbe ((12)) est du douzième ordre.

La courbe ((12)) possède au moins vingt-quatre points doubles; il y en a vingt-quatre qui sont les intersections des courbes (15) et (16); parmi ces derniers points, il y en a douze qui coïncident, par groupes de six, avec les points à l'infini sur l'ellipse, etc., etc....