NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LÉON RODET

Démonstration élémentaire de la gravitation universelle

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 385-401

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__385_0>

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DE LA GRAVITATION UNIVERSELLE;

PAR M. LÉON RODET,
Ingénieur des Manufactures de l'État.

La démonstration du grand principe de Physique de la gravitation universelle se compose, on le sait, de deux parties : dans la première, on s'appuie sur les lois expérimentales du mouvement planétaire, énoncées par Képler, et l'on en déduit que les planètes doivent être soumises à une force attractive, dirigée constamment vers le foyer de leur trajectoire où se trouve le centre de l'astre principal autour duquel elles gravitent, et que la grandeur de cette force varie en raison inverse de la distance au centre du corps attirant.

Dans la deuxième partie, réciproque de cette première, on étudie, *a priori*, quel doit être le mouvement d'un point matériel, lancé dans l'espace avec une certaine vitesse initiale et soumis à l'action d'une force attractive définie comme celle du mouvement planétaire, et l'on démontre que, dans ces conditions, le point doit décrire une conique dont l'espèce dépend uniquement des grandeurs relatives de la vitesse initiale, de la distance au centre d'attraction, et de l'intensité de l'action de ce centre évaluée à l'unité de distance.

Pendant longtemps, la démonstration de ce double théorème n'a été donnée que par les procédés du Calcul différentiel et intégral. Or les démonstrations ainsi données ont un double inconvénient : d'abord elles ne sont pas abordables à tout le monde, et l'on ne se contente plus beaucoup, aujourd'hui que bien des démonstrations de haute science ont *été* rendues abordables, de lire après l'énoncé d'un principe de cette importance : « On démontre que... ». Puis, il faut bien le reconnaître, l'Analyse mathématique conduit à coup sûr au résultat cherché celui qui s'est rendu maître de cette machine admirable; mais elle lui fournit le résultat définitif *tout fait*, sans lui permettre de voir par quels états intermédiaires il passe, par quel enchaînement d'idées la solution découle des données du problème.

Aussi, maintenant que l'on tend à vulgariser la science le plus possible, a-t-on songé à chercher des démonstrations plus élémentaires du principe de Newton; mais on s'est borné jusqu'ici à la première partie de la question, à la détermination de la force attractive du mouvement planétaire, ou plutôt de l'accélération par laquelle cette force se manifeste dans le mouvement des corps célestes. Je citerai, entre autres, les démonstrations données par M. Collignon dans son *Cours de Mécanique* (3e année, 1re Partie), et par M. Resal dans son *Traité de Cinématique pure*. Cette dernière démonstration a été reproduite dernièrement par MM. Ch. Brisse et Ch. André, dans leur *Cours de Physique à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales*, récemment publié.

Il ne m'est pas tombé sous les yeux d'étude, par des procédés élémentaires, du problème réciproque de la recherche de la trajectoire d'un point animé d'une accélération du genre de celle qui retient les planètes dans leur orbite elliptique. Cette question me paraissant avoir un certain intérêt, je me suis préoccupé d'en obtenir la solution, et je suis enfin parvenu, après un peu de travail, à deux démonstrations du principe de Newton. L'une, tout élémentaire, pourrait figurer dans un Cours de Cosmographie à l'usage des élèves de Mathématiques élémentaires, car elle ne s'appuie que sur les propriétés géométriques des sections coniques (courbes usuelles) que l'on donne dans l'enseignement de cette classe. Par malheur, elle est un peu longue, assez pénible; et, si je la publie un jour, ce ne sera guère que comme exemple de ce que l'on peut faire même avec des notions très-élémentaires.

La seconde démonstration, que je donne ici, est simple et rapide; et cependant elle n'exige pas d'autres connaissances que celles qui s'acquièrent en Mathématiques spéciales. Je comprends parmi ces notions celles relatives au rayon de courbure des coniques, puisque la théorie fort simple de la détermination de ce dernier est donnée dans l'ouvrage de Salmon (*Traité des sections coniques*), traduit par MM. Resal et Vaucheret, qui est aujourd'hui entre les mains de presque tous les élèves.

J'emploie fréquemment des formules empruntées à cet Ouvrage, entre autres celles si élégantes qu'il obtient en faisant intervenir la longueur b' du demi-diamètre conjugué de celui qui passe au point dont les coordonnées sont x et y. Ces formules n'étant pas encore d'un usage habituel chez nous, j'ai soin d'indiquer à côté le numéro de la traduction française où elles sont démontrées.

Bien que la première partie du problème ait déjà été traitée, je la reprends ici, parce que j'établis dans cette première partie certaines formules simples qu'il me suffit de rappeler en traitant la question inverse.

I. — *Accélération du mouvement planétaire.*

Je suppose démontré, parce que ce théorème se trouve partout, que de la constance de l'aire décrite dans des temps égaux, ou, si l'on veut, de la constance de la *vitesse aréolaire*, résulte que l'accélération du mouvement planétaire doit passer constamment par le foyer de l'orbite.

Je prends immédiatement un arc MM' (*) de la trajectoire, parcouru par le mobile en un temps très-petit θ. Le chemin curviligne MM' résulte de la composition de deux mouvements de lois différentes, par exemple d'un mouvement uniforme suivant la tangente, en vertu de la vitesse v au point M, et d'un mouvement varié dirigé, d'après la loi des aires, suivant le rayon vecteur MF.

Si nous menons par M' des parallèles à la tangente et au rayon vecteur, nous aurons en MM_1 l'espace $v\theta$ qui serait parcouru en vertu du mouvement uniforme tangentiel, en MG la quantité dont le point mobile glisserait le long du rayon vecteur en vertu de l'accélération G au point M.

Le déplacement rectiligne MG se décompose à son tour en deux autres de même loi que lui : MH, sur la tangente, est dû à l'accélération qui fait varier la grandeur de la vitesse; MI, sur la normale, provient de l'*accélération centripète* j du mouvement, laquelle, on le sait, a toujours pour valeur

$$j = \frac{v^2}{R},$$

R désignant le rayon de courbure de la trajectoire en M.

Or, quand deux mouvements sont de même loi, les espaces parcourus dans un temps θ sont entre eux comme les accélérations qui les font parcourir :

$$\frac{G}{j} = \frac{MG}{MI} = \frac{MF}{FP} = \frac{1}{\sin\varphi},$$

en désignant, avec Salmon, par φ l'angle que fait la tangente avec le rayon vecteur et par P le pied de la perpendiculaire abaissée du foyer F sur la tangente en M.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Donc

$$G = \frac{j}{\sin\varphi} = \frac{v^2}{R\sin\varphi},$$

et, comme (Salmon, nos 242 et 188) dans l'ellipse

$$R = \frac{b'^3}{ab}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{b'},$$

$$G = \frac{av^2}{b'^2}.$$

Mais (Salmon, no 173)

$$b'^2 = a^2 - e^2x^2 = (a - ex)(a + ex) = \rho\rho_1;$$

il en résulte

$$(\alpha) \qquad G = \frac{av^2}{\rho\rho_1}.$$

N.-B. — Cette valeur est remarquable par son analogie de forme avec celle de l'accélération du mouvement circulaire

$$j = \frac{v^2}{R}.$$

Continuons encore à transformer cette formule, pour ne plus y conserver qu'une seule variable, le rayon vecteur ρ.

Nous voyons sur la figure que

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{F'P'}{FP} = \frac{h'}{h},$$

et, comme $hh' = b^2$ ou $h' = \frac{b^2}{h}$,

$$\rho_1 = \rho\frac{b^2}{h^2}$$

et

$$G = \frac{a}{b^2}\frac{v^2h^2}{\rho^2}.$$

Mais $v\theta h$ est le double de l'aire MM'F décrite par le rayon vecteur dans le temps θ; si s^2 désigne la vitesse aréolaire constante,

$$hv\theta = 2s^2\theta,$$
$$h^2v^2 = 4s^4;$$

de là

$$G = \frac{a}{b^2}\frac{4s^4}{\rho^2},$$

ou, en remplaçant $\frac{b^2}{a}$ par le paramètre p,

$$(\beta) \qquad G = \frac{4s^4}{p\rho^2}.$$

Enfin, dans l'ellipse, l'aire entière πab est décrite dans le temps T de la révolution de la planète; donc

$$\pi ab = s^2 T$$

et

$$4s^4 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2},$$

d'où, dans ce cas spécial,

$$G = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}\frac{1}{\rho^2} = \frac{\mathcal{G}}{\rho^2}.$$

J'appelle ici $\mathcal{G}$ le facteur $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$, accélération que posséderait le mobile s'il était à une distance 1 du foyer. D'après la troisième loi de Képler, cette quantité est constante pour un même système planétaire.

II. — *Accélération sur une hyperbole ou une parabole.*

1° *Hyperbole.* — Tous les calculs que nous venons de faire pour le mouvement elliptique, toutes les propriétés sur lesquelles nous nous sommes appuyé, toutes les formules dont nous nous sommes servi sont applicables sans modification à l'hyperbole. Ainsi, un point qui aurait pour trajectoire une de ces courbes devrait être animé, le long du rayon vecteur, d'une accélération dont la valeur serait encore

$$(\alpha) \qquad G = \frac{av^2}{\rho\rho_1},$$

$$(\beta) \qquad G = \frac{4s^4}{p\rho^2}.$$

Mais ici nous ne pourrons pas pousser plus loin la transformation, parce qu'il n'y a pas lieu de chercher à exprimer la vitesse aréolaire s^2 en fonction de la surface totale, ni de parler d'un temps de révolution.

2° *Parabole.* — Mais le cas de la parabole demande à être étudié à part ; car, dans cette courbe, notre première formule (α) n'a pas lieu d'exister.

On peut bien prévoir *a priori* ce qu'elle deviendra ; en effet, supposons que nous partions de la formule pour l'ellipse, et remplaçons ρ_1 par $2a - \rho$, elle devient

$$G = \frac{av^2}{\rho(2a-\rho)} = \frac{av^2}{\rho\left(2 - \frac{\rho}{a}\right)},$$

et, pour $a = \infty$,

$$G = \frac{v^2}{2\rho}.$$

Mais on peut établir cette formule directement.

Nous trouverions ici, comme dans l'ellipse,

$$G = \frac{j}{\sin\varphi} = \frac{v^2}{R\sin\varphi}.$$

Or, dans la parabole, HT étant la sous-tangente et MH l'ordonnée,

$$\sin\varphi = \frac{FP}{MF} = \frac{MH}{MT} = \frac{y}{\sqrt{y^2+4x^2}} = \sqrt{\frac{2px}{2x(p+2x)}} = \sqrt{\frac{p}{2\rho}},$$

et (SALMON, n° 245)

$$R = \frac{N}{\sin^2\varphi}, \quad \text{d'où} \quad R\sin\varphi = \frac{N}{\sin\varphi} = \frac{p}{\sin^2\varphi} = 2\rho;$$

donc

$$(\alpha') \qquad G = \frac{v^2}{2\rho}.$$

N.-B. — Lorsque le mobile passe au sommet de la parabole, l'accélération qui le retient sur cette courbe et la lui fait parcourir est *la moitié* de celle qui lui ferait décrire un cercle autour du foyer.

Comme tout à l'heure, on trouverait

$$hv\theta = 2s^2\theta, \quad v^2 = \frac{4s^4}{h^2};$$

or

$$h^2 = \rho^2\sin^2\varphi = \tfrac{1}{2}\rho p;$$

on en déduit successivement

$$v^2 = \frac{8s^4}{\rho p},$$

et

$$(\beta) \qquad G = \frac{4s^4}{p\rho^2}.$$

Ainsi la formule (β) est applicable à la parabole.

En résumant les résultats de cette première partie de la question, nous avons obtenu *deux* expressions de l'accélération du mouvement d'un point qui décrit une conique, savoir :

$$(\alpha) \qquad G = \frac{av^2}{pp_1} \quad \text{pour les courbes à centre,}$$

$$(\alpha') \qquad G = \frac{v^2}{2p} \quad \text{pour la parabole,}$$

et

$$(\beta) \qquad G = \frac{4s^4}{p\rho^2},$$

formule qui s'applique également aux trois courbes du second ordre.

III. — *Trajectoire d'un point gravitant.*

Nous pouvons maintenant aborder la seconde partie de la question : supposer qu'un point M est soumis à la fois à une vitesse v qui l'entraîne suivant MM_1 et à une accélération Γ dirigée constamment vers un point fixe F, cette dernière variant comme l'inverse du carré de la distance FM ; et chercher quelle peut être la trajectoire du point M.

Nous trouverons alors successivement les caractères suivants pour cette trajectoire :

1° D'après la loi des aires, l'accélération passant par un point fixe, la trajectoire est plane, et la vitesse aréolaire du rayon vecteur est constante.

Si nous appelons s^2 cette vitesse aréolaire et φ l'angle que fait la vitesse v avec le rayon vecteur, nous avons ainsi une première loi à satisfaire

$$(1) \qquad v\theta\rho\sin\varphi = 2s^2\theta \quad \text{ou} \quad s^2 = \frac{1}{2}v_0\rho_0\sin\varphi_0,$$

en désignant par l'indice o la valeur des données au moment où le corps a commencé à se mouvoir.

2° Le mouvement résultant de la composition de deux mouvements *de loi différente,* la trajectoire, en si petits fragments que nous la décomposions, est courbe; et l'arc de courbe MM' est défini par cette condition que le rayon de courbure en M doit être tel que l'on ait

$$j = \frac{v^2}{R} = \Gamma \sin\varphi,$$

d'où, en remplaçant v par sa valeur en fonction de s^2, Γ par son expression, supposée de la forme $\frac{n^3}{\rho^2}$, on tirera, en dernière analyse,

$$(2) \qquad R \sin^3\varphi = 4\,\frac{s^4}{n^3} = \text{const.}$$

Donc : *la trajectoire est une courbe plane dont le rayon de courbure, multiplié par le cube du sinus de l'angle que fait la vitesse avec le rayon vecteur, donne un produit constant.*

Remonter de cette propriété à une définition plus connue de la courbe est un problème qui dépasse les connaissances de Mathématiques spéciales, dans lesquelles nous voulons nous maintenir. Il faut donc tourner la difficulté; voici comment :

Il existe *une conique,* et une seule, ayant son foyer en F, dont le rayon de courbure en M est la valeur que nous venons de trouver pour R. En effet, cette conique est assujettie à cinq conditions, savoir : un foyer donné et un contact du second ordre avec le cercle de rayon R ayant son centre sur la normale à la vitesse v en M.

Que faudrait-il pour obliger le point à parcourir cette conique? Lui appliquer en M, suivant le rayon vecteur MF, une accélération dont nous avons déterminé plus haut la valeur

$$(\beta) \qquad G = \frac{4s^4}{p\rho^2}.$$

Or, dans les coniques, on a

$$R = \frac{p}{\sin^3 \varphi}.$$

En effet, dans les coniques à centre,

$$R = \frac{b'^3}{ab} = \frac{b^2}{a} \frac{b'^3}{b^3},$$

et, dans la parabole,

$$R = \frac{N}{\sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{p}{\sin \varphi}.$$

On peut donc, dans la relation (2), remplacer $R \sin^3 \varphi$ par le paramètre p.

Si nous prenons maintenant cette valeur de p pour la reporter dans l'expression de G, nous trouvons

$$G = \frac{n^3}{4s^2} \frac{4s^2}{\rho^2} = \frac{n^3}{\rho^2} = \Gamma.$$

Ainsi l'accélération qui obligerait le point à parcourir la conique en question est précisément Γ.

Donc le point parcourra la conique ; c'est cette conique qui sera sa trajectoire réelle.

Ainsi *un point matériel, gravitant autour d'un centre attractif, décrit une conique qui a ledit centre pour foyer.*

Quelle est l'*espèce* de la conique trajectoire? C'est ce que nous allons chercher à déterminer.

IV. — *Espèce de la conique trajectoire.*

Il nous est facile de tracer notre conique trajectoire.

Puisque nous avons la longueur $p = \frac{4s^4}{n^3}$ du paramètre, portons-la en MK sur le rayon vecteur MF, et élevons en K la perpendiculaire KN : N est le point où la normale MN rencontre l'axe principal de la courbe ; donc cet axe est placé sur NF.

Faisons maintenant avec la tangente un angle QMP égal à φ; MQ sera le prolongement du second rayon vecteur de la courbe, et alors trois cas peuvent se présenter :

1° MQ rencontre l'axe de façon que N soit *entre les deux foyers :* la courbe est une *ellipse ;*

2° MQ est parallèle à l'axe, et la courbe est une *parabole ;*

3° MQ rencontre l'axe de telle sorte que N soit *en dehors de* FF' : la courbe est une *hyperbole.*

Définissons analytiquement les conditions qui caractérisent chacun de ces trois cas, en commençant par le cas intermédiaire, plus simple à traduire en calcul algébrique.

Si MQ est parallèle à l'axe, c'est que

$$(a) \qquad 2\varphi = \omega,$$

en appelant ω l'angle MFN.

Or, dans le triangle KNF, nous avons

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\mathrm{NK}}{\mathrm{NF}} = \frac{p \cot\varphi}{\rho - p},$$

et la condition (a) devient alors

$$\frac{2 \operatorname{tang}\varphi}{1 - \operatorname{tang}^2\varphi} = \frac{p \cot\varphi}{\rho - p},$$

d'où

$$(b) \qquad \operatorname{tang}^2\varphi = \frac{p}{2\rho - p},$$

qui peut s'écrire

$$\frac{\sin^2\varphi}{1-\sin^2\varphi}=\frac{p}{2\rho-p}, \quad \text{d'où} \quad \sin^2\varphi=\frac{p}{2\rho},$$

ou, dans les conditions initiales du mouvement,

$$(c) \qquad \sin^2\varphi_0=\frac{p}{2\rho_0}.$$

Mais nous avons, d'après la formule (1),

$$\sin^2\varphi_0=\frac{4s^4}{v_0^2\rho_0^2};$$

et, d'autre part,

$$p=\frac{4s^4}{n^3}=\frac{4s^4}{G_0\rho_0^2}.$$

A l'aide de ces valeurs, (c) devient, en définitive,

$$(d) \qquad \frac{1}{v_0^2}=\frac{1}{G_0 2\rho_0},$$

ou

$$(e) \qquad \frac{v_0^2}{\rho_0}=2G_0;$$

c'est notre formule (β').

On verra facilement maintenant à quelles conditions nous aurons les autres courbes.

Pour l'ellipse, il faut que φ soit *plus grand* que dans la parabole; donc

$$(c') \qquad \sin^2\varphi_0>\frac{p}{2\rho_0},$$

$$(d') \qquad \frac{1}{v_0^2}>\frac{1}{G_0 2\rho_0},$$

et enfin

$$(e') \qquad \frac{v_0^2}{\rho_0}<2G_0.$$

Pour l'hyperbole, il nous faudrait, au contraire,

$$(c'') \qquad \sin^2\varphi_0 < \frac{p}{2\rho_0},$$

$$(d'') \qquad \frac{1}{v_0^2} < \frac{1}{G_0 2\rho_0},$$

et

$$(e'') \qquad \frac{v_0^2}{\rho_0} > 2G_0.$$

Ce sont les conditions connues, et il est facile de voir qu'elles reviennent à la formule (β) des coniques à centre; en effet, cette formule, pour l'ellipse, nous donne

$$G = \frac{av^2}{\rho(2a - \rho)},$$

ou

$$(\varepsilon') \qquad \frac{v^2}{\rho} = G\left(2 - \frac{\rho}{a}\right),$$

tandis que, pour l'hyperbole, nous aurions

$$G = \frac{av^2}{\rho(2a + \rho)},$$

ou

$$(\varepsilon'') \qquad \frac{v^2}{\rho} = G\left(2 + \frac{\rho}{a}\right).$$

V. — *Calcul des éléments de l'orbite.*

Reste à calculer les éléments géométriques de l'orbite; on y parviendra comme il suit :

Grand axe. — Des formules (ε') et (ε''), ou mieux (α), en remplaçant G par $\frac{n^3}{\rho_0^2}$, on tire

$$\frac{n^3}{\rho_0} = \frac{av_0^2}{2a \mp \rho_0},$$

d'où

$$a = \frac{\pm n^3 \rho_0}{2n^3 - v_0^2 \rho_0},$$

ou, si l'on veut,

$$a = \frac{\pm G_0 \rho_0}{2G_0 - \frac{v_0^2}{\rho_0}},$$

le signe supérieur se rapportant à l'ellipse, le signe inférieur se rapportant à l'hyperbole. Pour le cas de la parabole, cette valeur devient infinie.

On a déjà remarqué que la longueur de l'axe principal ne dépendait que des grandeurs relatives de v_0, ρ_0 et du coefficient n^3, ou, comme nous l'avons appelé en traitant de l'ellipse, $\mathcal{G}$, l'accélération à l'unité de distance. L'angle φ_0 que fait la vitesse initiale avec le rayon vecteur n'intervient point ici.

Petit axe. — Ayant la valeur de a et, d'autre part, sachant que

$$p = \frac{b^3}{a} = \frac{4s^4}{n^3},$$

on en tirera facilement

$$b^2 = \frac{\pm 4s^4 \rho_0}{2n^3 - v_0^2 \rho_0},$$

ou, en remplaçant le carré de la vitesse aréolaire $4s^4$ par $v_0^2 \rho_0^2 \sin^2\varphi$,

$$b^2 = \frac{\pm v_0^2 \rho_0^3 \sin^2\varphi_0}{2n^3 - v_0^2 \rho_0}.$$

Excentricité. — On déduira l'excentricité, soit des valeurs une fois connues de a et de b, soit directement, en partant de l'équation de la courbe

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\omega},$$

dans laquelle ω est l'angle qui nous a servi plus haut [formules (a), (b), (c)], et qui est défini par la condition que

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{p \cot \varphi}{\rho - p}.$$

En effectuant les calculs, on trouve

$$e = \sqrt{1 - \frac{4 s^4 (2 n^3 - v_0^2 \rho_0)}{n^6 \rho_0}},$$

valeur qui se réduit à 1 pour le cas de la parabole, est plus petite que 1 pour l'ellipse, plus grande que 1 pour l'hyperbole.

Vitesse. — Enfin on peut aisément calculer la grandeur de la vitesse à chaque instant.

Nous aurons, en effet,

$$(\varepsilon')(\varepsilon'') \qquad \frac{v^3}{\rho} = G\left(2 \mp \frac{\rho}{a}\right) = \frac{n^3}{\rho^2}\left(2 \mp \frac{\rho}{a}\right),$$

d'où

$$v^2 = n^8 \left(\frac{2}{\rho} \mp \frac{1}{a}\right),$$

et, en remplaçant $\frac{1}{a}$ par l'inverse de la valeur du grand axe donnée plus haut, savoir

$$\frac{1}{a} = \mp \left(\frac{v_0^2}{n^3} - \frac{2}{\rho_0}\right),$$

il en résulte

$$v^2 = v_0^2 + 2 n^3 \left(\frac{1}{\rho} \mp \frac{1}{\rho_0}\right),$$

le signe supérieur se rapportant toujours à l'ellipse, l'inférieur à l'hyperbole.

Dans la parabole, la formule (e) nous donne simplement

$$v^2 = \frac{2n^2}{\rho}.$$

Dans cette courbe, la vitesse est à chaque instant en raison inverse de la raison carrée de la distance au centre d'attraction.