Nouvelles annales de mathématiques

Édouard Amigues

Relation entre les volumes correspondants de deux figures homographiques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 374-379

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__374_1>

RELATION ENTRE LES VOLUMES CORRESPONDANTS DE DEUX FIGURES HOMOGRAPHIQUES;

PAR M. ÉDOUARD AMIGUES.

Supposons que l'on ait trois axes rectangulaires; imaginons, dans ce système de coordonnées, deux figures homographiques, dont les points correspondants soient définis par ces relations

$$X = ax + by + cz + d,$$
$$Y = a'x + b'y + c'z + d',$$
$$Z = a''x + b''y + c''z + d''.$$

Considérons quatre points de l'une des figures et les quatre points correspondants de l'autre, et formons le produit des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ a' & b' & c' & 0 \\ a'' & b'' & c'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ce produit sera, d'après les trois relations qui existent entre les coordonnées de deux points correspondants,

$$\begin{vmatrix} X-d & Y-d' & Z-d'' & 1 \\ X_1-d & Y_1-d' & Z_1-d'' & 1 \\ X_2-d & Y_2-d' & Z_2-d'' & 1 \\ X_3-d & Y_3-d' & Z_3-d'' & 1 \end{vmatrix};$$

multipliant la dernière colonne par d, d', d'' et ajoutant aux trois autres, ce produit devient

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

De là la formule

$$(1) \quad \begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Le premier membre représente six fois le volume d'un tétraèdre ; le premier facteur du second membre, six fois le volume du tétraèdre correspondant. Nous désignerons les volumes de ces tétraèdres par V et v. Quant au second facteur du second membre, nous l'appellerons Δ et nous remarquerons que $\Delta \lessgtr 0$, puisque, à chaque point X, Y, Z, doit correspondre un seul point xyz. Nous aurons alors, suivant le signe de Δ,

$$\pm V = v\Delta.$$

Il est facile de voir que la même relation existe entre les volumes de deux polyèdres correspondants et, par suite, de deux figures correspondantes quelconques, limitées par des surfaces planes ou courbes.

En effet, la formule (1) nous montre que, si quatre points de l'une des figures sont dans un même plan, il en est de même des quatre points correspondants de l'autre figure, ce qui est le propre de l'homographie. Mais elle va nous montrer aussi que si, dans une des figures, deux points sont d'un même côté par rapport à un plan, il en sera de même pour les points et le plan correspondants de l'autre figure, et que, au contraire, si deux points sont de part et d'autre d'un plan dans l'une des figures, la disposition de la figure correspondante sera la même. Il nous suffira, pour le voir, de considérer l'équation $V = 0$ comme représentant un plan passant par trois points, X, Y, Z étant les coordonnées courantes; $v = 0$ représentera alors le plan correspondant, x, y, z étant les coordonnées courantes. D'après la relation (1), il est évident que, si, en substituant à la place de X, Y, Z tantôt X_4, Y_4, Z_4 et tantôt X_5, Y_5, Z_5, V conserve le même signe, il en sera de même de v, quand, à la place de x, y, z, on substituera tantôt x_4, y_4, z_4 et tantôt x_5, y_5, z_5, et inversement. Ceci prouve bien que les positions relatives de deux points, par rapport à un plan, se conservent d'une figure à l'autre.

On voit alors que, si un polyèdre est convexe, le polyèdre correspondant l'est aussi, et que deux polyèdres correspondants quelconques peuvent être décomposés en une somme arithmétique de tétraèdres se correspondant deux à deux; c'est évidemment tout ce qu'il fallait établir.

Nous laisserons au lecteur le soin de poser le principe analogue de la Géométrie plane, et nous donnerons quelques applications, en les choisissant de préférence parmi les exemples simples, pour lesquels la formule (1) s'obtient d'une manière tout à fait élémentaire.

1° Trouver le volume de l'ellipsoïde $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$ (coordonnées rectangulaires).

Si nous posons

$$X=\frac{a}{R}x,\quad Y=\frac{b}{R}y,\quad Z=\frac{c}{R}z,$$

nous voyons que la figure homographique est la sphère

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

D'autre part, on a évidemment

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{abc}{R^3}\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire, en remarquant que cette relation s'étend à deux volumes correspondants quelconques W et w,

$$W=\frac{abc}{R^3}w. \tag{2}$$

En particulier, en appelant V le volume de l'ellipsoïde et v celui de la sphère homographique,

$$V=\frac{abc}{R^3}v,$$

$$V=\tfrac{4}{3}\pi abc.$$

2° Le parallélépipède construit sur trois demi-diamètres conjugués d'un ellipsoïde a un volume constant.

Faisant la même transformation homographique que tout à l'heure, on obtient la formule générale (2).

Il est facile de voir que trois demi-diamètres conjugués correspondent à trois rayons rectangulaires de la sphère, et que le parallélépipède ci-dessus correspond au cube qui a pour arêtes ces trois rayons. Le volume de ce cube étant R^3, celui du parallélépipède, d'après la formule (2), doit être abc.

3° L'ellipsoïde $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$ et l'ellipsoïde homographique, obtenu en posant

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = x + y + z,$$

ont même volume; car, dans ce mode de transformation,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Tous les volumes correspondants doivent donc être équivalents; les deux surfaces quelconques

$$f(X, Y, Z) = 0 \quad \text{et} \quad f(x, y, x + y + z) = 0$$

limitent des volumes équivalents.

4° Soit le tore

$$4d^2(X^2 + Y^2) = (X^2 + Y^2 + Z^2 + l^2 - R^2)^2;$$

en transformant cette surface homographiquement, on obtient un anneau irrégulier, dont l'équation est

$$\begin{aligned}4d^2[(ax + by + cz + d)^2 + (a'x + b'y + c'z + d')^2] \\ = [(ax + by + cz + d)^2 + (a'x + b'y + c'z + d')^2 \\ + (a''x + b''y + c''z + d'')^2 + l^2 - R^2]^2,\end{aligned}$$

et dont le volume est

$$2\pi^2 R^2 l \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

5° Si l'on fait la transformation homographique

$$\begin{aligned} X &= x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma + d, \\ Y &= x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma' + d', \\ Z &= x\cos\alpha'' + y\cos\beta'' + z\cos\gamma'' + d'', \end{aligned}$$

en supposant

$$\begin{aligned} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= 1, \\ \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' &= 1, \\ \cos^2\alpha'' + \cos^2\beta'' + \cos^2\gamma'' &= 1, \\ \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' &= 0, \\ \cos\alpha\cos\alpha'' + \cos\beta\cos\beta'' + \cos\gamma\cos\gamma'' &= 0, \\ \cos\alpha'\cos\alpha'' + \cos\beta'\cos\beta'' + \cos\gamma'\cos\gamma'' &= 0; \end{aligned}$$

comme

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \\ \cos\alpha'' & \cos\beta'' & \cos\gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1,$$

les figures correspondantes ont même volume. On peut voir d'ailleurs qu'elles sont égales, en rapportant la seconde figure à trois nouveaux axes rectangulaires qui se trouvent naturellement indiqués.

Conclusion. — Il résulte de ce qui précède que, dans toute figure transformée homographiquement en coordonnées cartésiennes, les surfaces en Géométrie plane, les volumes en Géométrie de l'espace se trouvent simplement multipliés par un facteur constant, comme il arrive des longueurs lorsque d'une figure on passe à la figure semblable. L'utilité de l'homographie ne se borne donc pas à l'étude des propriétés descriptives.