NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEORGES DOSTOR

Rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre en fonction des arêtes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 370-374

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__370_0>

RAYON DE LA SPHÈRE CIRCONSCRITE AU TÉTRAÈDRE EN FONCTION DES ARÊTES;

PAR M. GEORGES DOSTOR,
Docteur ès sciences.

Soient S, A, B, C les quatre sommets du tétraèdre. Représentons par a, b, c les trois arêtes SA, SB, SC issues du sommet S, et par λ, μ, ν les inclinaisons mutuelles BSC, CSA, ASB de ces arêtes.

Prenons le sommet S pour origine des coordonnées et les droites SA, SB, SC pour les axes OX, OY, OZ.

Désignons par x, y, z les coordonnées du centre O de la sphère circonscrite et par R le rayon de cette sphère. Le centre O sera le point d'intersection des trois plans élevés sur les milieux des arêtes a, b, c, perpendiculairement à ces arêtes; par conséquent $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$ seront les projections orthogonales du rayon $SO = R$ sur les trois axes des coordonnées OX, OY, OZ, de sorte que, si α, β, γ sont les inclinaisons de SO sur ces trois axes, nous avons

$$(1)\qquad a = 2R\cos\alpha,\quad b = 2R\cos\beta,\quad c = 2R\cos\gamma.$$

Cela posé, projetons le rayon SO et la ligne brisée $x + y + z$ successivement sur SO et sur les trois axes de coordonnées; nous obtenons les équations

$$\begin{aligned}
-R + x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma &= 0,\\
-R\cos\alpha + x + y\cos\nu + z\cos\mu &= 0,\\
-R\cos\beta + x\cos\nu + y + z\cos\lambda &= 0,\\
-R\cos\gamma + x\cos\mu + y\cos\lambda + z &= 0,
\end{aligned}$$

qui, devant être compatibles, exigent que l'on ait le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\beta & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\gamma & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est *la relation qui existe entre les six angles que forment entre elles quatre droites* SO, SA, SB, SC *issues d'un même point* S.

Dans ce déterminant, mettons à la place de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ leurs valeurs $\frac{a}{2R}$, $\frac{b}{2R}$, $\frac{c}{2R}$ tirées des égalités (1); l'équation précédente deviendra

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{a}{2R} & \frac{b}{2R} & \frac{c}{2R} \\ \frac{a}{2R} & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \frac{b}{2R} & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \frac{c}{2R} & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en multipliant la première ligne et la première colonne chacune par $2R$,

$$\text{(I)} \qquad \begin{vmatrix} 4R^2 & a & b & c \\ a & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ b & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ c & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation donne la valeur de R en fonction des trois arêtes a, b, c issues du même sommet S et des inclinaisons mutuelles λ, μ, ν de ces arêtes. On en tire, en effet,

$$4R^2\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & b & c \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

$$-b\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \end{vmatrix},$$

ou, en effectuant et développant,

$$(\mathrm{II})\quad \left\{\begin{aligned} 4R^2\Delta = a^2\sin^2\lambda &+ 2bc(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\ + b^2\sin^2\mu &+ 2ca(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) \\ + c^2\sin^2\nu &+ 2ab(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu). \end{aligned}\right.$$

Dans cette expression, Δ représente la quantité

$$1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu.$$

La valeur de $4R^2\Delta$ peut s'exprimer en fonction des six arêtes du tétraèdre. Représentons, en effet, par a', b', c' les trois arêtes BC, CA, AB qui sont respectivement opposées aux arêtes $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$. Les triangles SBC, SCA, SAB nous donnent

$$a'^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\lambda,\quad b'^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\mu,$$
$$c'^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\nu,$$

d'où nous tirons

$$\cos\lambda = \frac{b^2+c^2-a'^2}{2bc},\quad \cos\mu = \frac{c^2+a^2-b'^2}{2ca},\quad \cos\nu = \frac{a^2+b^2-c'^2}{2ab}.$$

Substituons ces valeurs dans le second membre de l'équation (II) ; nous obtenons d'abord

$$\begin{aligned} &4a^2b^2c^2[a^2\sin^2\lambda + 2bc(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)] \\ &\quad = 2b^2b'^2c^2c'^2 - a^4a'^4 + (2b^4c^4 - c^4a^4 - a^4b^4) \\ &\qquad + 2a^2b^2c^2(2a^2 - b^2 - c^2) + 2a^2a'^2(2b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) \\ &\qquad - 2b^2b'^2(c^2a^2 + b^2c^2) - 2c^2c'^2(a^2b^2 + b^2c^2), \end{aligned}$$

puis, par permutation circulaire,

$$\begin{aligned}4a^2b^2c^2[&b^2\sin^2\mu + 2ca(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu)]\\ &= 2c^2c'^2a^2a'^2 - b^4b'^4 + (2c^4a^4 - a^4b^4 - b^4c^4)\\ &\quad + 2a^2b^2c^2(2b^2 - c^2 - a^2) + 2b^2b'^2(2c^2a^2 + a^2b^2 + b^2c^2)\\ &\quad - 2c^2c'^2(a^2b^2 + c^2a^2) - 2a^2a'^2(b^2c^2 + c^2a^2),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}4a^2b^2c^2[&c^2\sin^2\nu + 2ab(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)]\\ &= 2a^2a'^2b^2b'^2 - c^4c'^4 + (2a^4b^4 - b^4c^4 - c^4a^4)\\ &\quad + 2a^2b^2c^2(2c^2 - a^2 - b^2) + 2c^2c'^2(2a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)\\ &\quad - 2a^2a'^2(b^2c^2 + a^2b^2) - 2b^2b'^2(c^2a^2 + a^2b^2).\end{aligned}$$

Ajoutant ces trois dernières égalités membre à membre et réduisant, nous trouvons que le second membre de l'équation (II), multiplié par $4a^2b^2c^2$ est égal à

$$2b^2b'^2c^2c'^2 + 2c^2c'^2a^2a'^2 + 2a^2a'^2b^2b'^2 - a^4a'^4 - b^4b'^4 - c^4c'^4;$$

il nous vient donc

$$\text{(III)}\quad R^2 = \frac{2b^2b'^2c^2c'^2 + 2c^2c'^2a^2a'^2 + 2a^2a'^2b^2b'^2 - a^4a'^4 - b^4b'^4 - c^4c'^4}{16a^2b^2c^2\Delta},$$

ou

$$\text{(IV)}\quad R^2 = \frac{(aa' + bb' + cc')(bb' + cc' - aa')(cc' + aa' - bb')(aa' + bb' - cc')}{16a^2b^2c^2\Delta}.$$

Cette expression peut s'écrire sous forme de déterminant

$$\text{(V)}\qquad 16a^2b^2c^2\Delta R^2 = \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & c'^2 & b'^2 \\ b^2 & c'^2 & 0 & a'^2 \\ c^2 & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Si l'on observe que le volume V du tétraèdre est donné par

$$36V^2 = a^2b^2c^2\Delta,$$

on trouve que

$$576\,V^2R^2 = \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & c'^2 & b'^2 \\ b^2 & c'^2 & 0 & a'^2 \\ c^2 & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix},$$

ou bien

$$(\text{VI})\quad \left\{ \begin{array}{l} 24\,VR \\ = \sqrt{(aa'+bb'+cc')(bb'+cc'-aa')(cc'+aa'-bb')(aa'+bb'-cc')}. \end{array} \right.$$

Posant

$$aa'+bb'+cc' = 2P^2,$$

on a encore

$$R = \frac{1}{6V}\sqrt{P^2(P^2-aa')(P^2-bb')(P^2-cc')}.$$

Cette dernière expression a été donnée, sans démonstration, par M. Brassine, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 1[re] série, t. VI, p. 227, année 1847.