NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEORGES DOSTOR

Calcul du rayon de la sphère inscrite dans le tétraèdre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 367-369

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__367_0>

CALCUL DU RAYON DE LA SPHÈRE INSCRITE DANS LE TÉTRAÈDRE;

PAR M. GEORGES DOSTOR,
Docteur ès sciences.

Considérons le tétraèdre SABC, qui est compris sous les arêtes

$$SA = a, \quad SB = b, \quad SC = c,$$

issues du sommet S, lesquelles forment entre elles les angles

$$BSC = \lambda, \quad CSA = \mu, \quad ASB = \nu.$$

Prenons le sommet S pour origine des coordonnées et les droites SA, SB, SC pour axes respectifs des x, y, z positifs.

Soient x, y, z les coordonnées du centre O de la sphère inscrite, et r le rayon de cette sphère. On sait que la distance d d'un point (x, y, z) à un plan

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

est donnée par la formule

$$(1) \qquad d^2 = \pm (Ax + By + Cz + D)\frac{\Delta}{U},$$

où

$$\Delta^2 = 1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu,$$

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} U^2 = {} & A^2\sin^2\lambda + 2BC(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\ & + B^2\sin^2\mu + 2CA(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) \\ & + C^2\sin^2\nu + 2AB(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu). \end{aligned}\right.$$

Nous obtenons donc la distance du centre O au plan SBC des yz, en faisant dans (1) et (2) $A = 1$, $B = C = D = 0$; cette distance étant z, nous avons ainsi l'égalité

$$r = \frac{\Delta x}{\sin\lambda}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{r\sin\lambda}{\Delta}.$$

On verrait de même que

$$y = \frac{r\sin\mu}{\Delta}, \quad z = \frac{r\sin\nu}{\Delta}$$

sont les deux autres coordonnées du centre O de la sphère inscrite. Il s'ensuit que les équations

$$(3) \qquad \frac{x}{\sin\lambda} = \frac{y}{\sin\mu} = \frac{z}{\sin\nu}$$

sont celles de la droite SO, également inclinée sur les trois faces SBC, SCA, SAB du trièdre S.

Dans la formule (1), remplaçons x, y, z par les valeurs précédentes, d par r et A, B, C, D par $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, -1; nous obtenons la distance du centre O de la sphère à la quatrième face ABC du tétraèdre. Il en résulte l'équation

$$\begin{aligned} r + \sqrt{\begin{aligned} &\frac{\sin^2\lambda}{a^2} + \frac{2}{bc}\left(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda\right) \\ &+ \frac{\sin^2\mu}{b^2} + \frac{2}{ca}\left(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu\right) \\ &+ \frac{\sin^2\nu}{c^2} + \frac{2}{ab}\left(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu\right) \end{aligned}} &= \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1\right)\Delta \\ &= r\left(\frac{\sin\lambda}{a} + \frac{\sin\mu}{b} + \frac{\sin\nu}{c}\right) - \Delta, \end{aligned}$$

qui fournit la valeur de r. Élevant les deux membres au carré, afin de faire disparaître le radical, et réduisant, on change cette équation dans la suivante :

$$4\left(a\sin\frac{\mu+\nu-\lambda}{2}+b\sin\frac{\nu+\lambda-\mu}{2}\right.$$
$$\left.+c\sin\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}\right)\sin\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}r^2$$
$$-2(bc\sin\lambda+ca\sin\mu+ab\sin\nu)\Delta r+abc\Delta^2=0;$$

elle donne les rayons des deux sphères, tangentes aux quatre faces, qui ont leurs centres situés sur la droite (3).

Si l'on a soin de changer, dans cette équation, successivement le signe de λ, μ, ν, on obtiendra les rayons des six autres sphères, qui sont tangentes aux plans des quatre faces du tétraèdre.

Ces sphères ont leurs centres situés, deux par deux, sur les droites respectives

$$-\frac{x}{\sin\lambda}=\frac{y}{\sin\mu}=\frac{z}{\sin\nu},$$
$$\frac{x}{\sin\lambda}=-\frac{y}{\sin\mu}=\frac{z}{\sin\nu},$$
$$\frac{x}{\sin\lambda}=\frac{y}{\sin\mu}=-\frac{z}{\sin\nu},$$

qui, étant dirigées dans l'intérieur des trois trièdres

SA'BC, SAB'C, SABC',

formés par deux des arêtes SA, SB, SC et le prolongement de la troisième, sont les lieux des points équidistants des faces de ces trièdres.

Nous laissons au lecteur le soin de la discussion des valeurs de r, qui ne manque pas d'intérêt.
