MORET-BLANC

Solution d'une question du concours d'agrégation de 1865

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 360-364

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__360_0>

SOLUTION D'UNE QUESTION DU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1865;

PAR M. MORET-BLANC.

Étant donnée une sphère, dont le rayon sera pris pour unité, et un cylindre droit ayant pour base une ellipse de même centre que la sphère et dont les demi-axes seront représentés par les constantes $\sin a$ *et* $\sin b$, *démontrer :*

1° *Qu'il existe sur la sphère deux points* F *et* F' *tels que la somme des arcs de grands cercles* MF *et* MF' *aboutissant à un point quelconque* M *de la courbe d'intersection est constante;*

2° *Que ces deux arcs font des angles égaux avec la tangente au point* M.

Construction graphique des points F *et* F'.

Examen du cas particulier où la somme MF + MF' *est égale à une demi-circonférence de grand cercle.*

1° Je prends le grand axe de l'ellipse pour axe des x, le petit axe pour axe des y et l'axe du cylindre pour axe des z.

Soient x, y, z les coordonnées du point M; x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 celles des points cherchés F et F'; posons de plus

$$\text{arc MF} = V, \quad \text{arc MF}' = V' \quad \text{et} \quad V + V' = 2A.$$

Les coordonnées d'un point de la sphère sont les cosinus des angles que le rayon de ce point fait avec les axes. On a donc

$$\cos V = xx_1 + yy_1 + zz_1, \quad \cos V' = xx_2 + yy_2 + zz_2.$$

Mais il est clair, par raison de symétrie, que si les points F et F′ existent, ils doivent se trouver dans l'un des plans de symétrie, probablement celui des xz, et être symétriquement placés par rapport à l'autre.

Je pose donc

$$x_2 = -x_1, \quad y_1 = y_2 = 0, \quad z_2 = z_1.$$

Les relations précédentes deviennent alors

$$\cos V = xx_1 + zz_1, \quad \cos V' = -xx_1 + zz_1,$$

d'où

$$\cos V + \cos V' = 2zz_1 = 2\cos A \cos \frac{V'-V}{2},$$

$$\cos V - \cos V' = 2xx_1 = 2\sin A \sin \frac{V'-V}{2},$$

et, par suite,

$$\cos \frac{V'-V}{2} = \frac{zz_1}{\cos A}, \quad \sin \frac{V'-V}{2} = \frac{xx_1}{\sin A}.$$

Élevant au carré et ajoutant, il vient

$$1 = \frac{z^2 z_1^2}{\cos^2 A} + \frac{x^2 x_1^2}{\sin^2 A},$$

ou

$$\sin^2 A \cos^2 A = \sin^2 A\, z^2 z_1^2 + \cos^2 A\, x^2 x_1^2;$$

mais on a

$$x_1^2 = 1 - z_1^2, \quad x^2 = \sin^2 a \cos^2 \omega, \quad y^2 = \sin^2 b \sin^2 \omega,$$

et, par suite,

$$z^2 = 1 - \sin^2 a \cos^2 \omega - \sin^2 b \sin^2 \omega = \cos^2 b - (\sin^2 a - \sin^2 b)\cos^2 \omega,$$

ω étant le paramètre angulaire de la projection du point M sur l'ellipse.

En substituant ces valeurs de x_1^2, x^2, z^2 dans l'équation obtenue, elle devient

$$\sin^2 A \cos^2 A = [\sin^2 A \cos^2 b - (\sin^2 a - \sin^2 A \sin^2 b)\cos^2\omega] z_1^2 + \cos^2 A \sin^2 a \cos^2\omega,$$

ou

$$\cos^2 A (\sin^2 A - \sin^2 a \cos^2\omega) = [\sin^2 A \cos^2 b - (\sin^2 a - \sin^2 A \sin^2 b)\cos^2\omega] z_1^2,$$

d'où

$$z_1^2 = \frac{\cos^2 A (\sin^2 A - \sin^2 a \cos^2\omega)}{\sin^2 A \cos^2 b - (\sin^2 a - \sin^2 A \sin^2 b)\cos^2\omega}.$$

Cette valeur devant être indépendante de ω, il faut que l'on ait

$$\frac{1}{\cos^2 b} = \frac{\sin^2 a}{\sin^2 a - \sin^2 A \sin^2 b},$$

d'où

$$\sin^2 a - \sin^2 A \sin^2 b = \sin^2 a \cos^2 b,\quad \sin^2 a \sin^2 b = \sin^2 A \sin^2 b,$$
$$\sin^2 a = \sin^2 A,\quad A = a.$$

Il en résulte

$$z_1^2 = \frac{\cos^2 a}{\cos^2 b},$$

$$x_1^2 = \frac{\cos^2 b - \cos^2\omega}{\cos^2 b} = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\cos^2 b} = \frac{c^2}{\cos^2 b},\quad x_1 = \frac{c}{\cos b},$$

en appelant c la distance d'un foyer de l'ellipse, base du cylindre, à son centre.

De là résulte la construction suivante des points F, F'.

Par l'extrémité du petit axe de l'ellipse donnée, menez une parallèle au grand axe qui rencontre la sphère aux points N, N'; tirez le rayon ON; par le foyer, élevez une perpendiculaire au grand axe qui rencontre ON en P; prenez sur le grand axe OQ = OQ' = OP; les perpendiculaires au plan de l'ellipse, élevées par les points Q et Q', couperont la sphère aux points F et F'.

La courbe d'intersection du cylindre et de la sphère porte le nom d'*ellipse sphérique*; les points F et F′ en sont les *foyers*.

Remarque. — On aurait pu prendre $A = \pi - \omega$, d'où $2A = 2\pi - 2\omega$; mais alors il aurait fallu prendre $z_1 = -\frac{\cos a}{\cos b}$, c'est-à-dire que, l'ellipse sphérique étant dans l'hémisphère supérieur, les foyers seraient dans l'hémisphère inférieur, et *vice versa*. Les foyers de l'une des deux courbes sont donc aussi foyers de l'autre.

Si l'on cherche les foyers dans le plan des yz, il faut, dans les calculs précédents, permuter x et y, x_1 et y_1, a et b, $\sin\omega$ et $\cos\omega$; il en résulte $y_1^2 = \frac{\sin^2 b - \sin^2 a}{\cos^2 a}$, valeur négative : ces foyers sont donc imaginaires.

Si l'on a

$$V + V' = \pi,$$

il en résulte

$$\cos V + \cos V' = 0$$

ou

$$(x_1 + x_2)x + (y_1 + y_2)y + (z_1 + z_2)z = 0.$$

Cette condition est nécessaire et suffisante : on y satisfait en posant $x_2 = -x_1$, $y_2 = -y_1$, $z_2 = -z_1$, c'est-à-dire qu'il suffit de prendre pour F et F′ deux points diamétralement opposés sur la sphère, ce qui était évident *a priori*.

2° Pour démontrer le théorème relatif à la tangente en un point de l'ellipse sphérique, on peut remplacer la tangente par l'arc de grand cercle tangent au même point; la démonstration est alors tout à fait semblable à celle du théorème analogue sur la tangente à l'ellipse plane; il suffit d'y remplacer les lignes droites par des arcs de grands cercles.

On en déduit, pour la construction de l'arc de grand cercle tangent à l'ellipse sphérique et passant par un point donné sur la courbe, ou extérieur à la courbe, les mêmes règles, *mutatis mutandis*, que pour mener une tangente à l'ellipse plane, ainsi que les théorèmes suivants :

L'ellipse sphérique est lieu des points de la surface de la sphère également distants de l'un des foyers et de la circonférence décrite de l'autre foyer comme pôle avec une distance polaire égale à la corde du grand axe.

Cette circonférence est le lieu des points symétriques de l'autre foyer, par rapport aux grands cercles tangents à l'ellipse.

Si, d'un point extérieur P, *on mène des arcs de grands cercles tangents à l'ellipse, ils forment avec les arcs* PF, PF′ *respectivement des angles égaux.*