MORET-BLANC

Solution d'une question du concours d'agrégation de 1864

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 357-359

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__357_1>

SOLUTION D'UNE QUESTION DU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1864;

PAR M. MORET-BLANC.

Étant donnée une ellipse, on décrit un cercle sur le grand axe AA′ *comme diamètre, et l'on mène deux rayons quelconques* OD, OE *assujettis à faire entre eux un angle constant* α. *On projette leurs extrémités* D *et* E *sur l'ellipse en* P *et* Q *par des perpendiculaires au grand axe. Enfin, par l'une de ces projections* P, *on mène au plan de l'ellipse une perpendiculaire* PP′ *de longueur constante* h. *On demande le lieu engendré par la droite qui joint le point* Q *au point* P, *lorsque le couple de rayons* OD, OE *prend dans le plan du cercle toutes les positions imaginables.*

1. Je prends pour axe des z la perpendiculaire au plan

de l'ellipse, menée par son centre, l'origine étant placée à la distance $\frac{h}{2}$ au-dessus de ce plan, et pour axes des x et des y des parallèles aux axes de l'ellipse.

Soient a et b les demi-axes de l'ellipse, β et $\alpha+\beta$ les angles que les rayons OD et OE font avec OA; les coordonnées de P′ sont $a\cos\beta$, $b\sin\beta$, $\frac{h}{2}$; celles de Q sont $a\cos(\alpha+\beta)$, $b\sin(\alpha+\beta)$, $-\frac{h}{2}$. Les équations de la droite P′Q sont donc

$$\frac{x-a\cos\beta}{a\cos(\alpha+\beta)-a\cos\beta}=\frac{y-b\sin\beta}{b\sin(\alpha+\beta)-b\sin\beta}=\frac{z-\frac{1}{2}h}{-h},$$

d'où l'on tire

$$\left(z+\frac{1}{2}h\right)\cos\beta-\left(z-\frac{1}{2}h\right)\cos(\alpha+\beta)=\frac{hx}{a},$$

$$\left(z+\frac{1}{2}h\right)\sin\beta-\left(z-\frac{1}{2}h\right)\sin(\alpha+\beta)=\frac{hy}{b}.$$

Élevant ces équations au carré et ajoutant, β est éliminé, et il vient

$$\left(z+\frac{1}{2}h\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}h\right)^2-2\left(z^2-\frac{1}{4}h^2\right)\cos\alpha=h^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right),$$

ou

$$2z^2(1-\cos\alpha)+\frac{h^2}{2}(1+\cos\alpha)=h^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right),$$

que l'on peut écrire

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{4z^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{h^2}=\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

ou enfin

$$\frac{x^2}{a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{y^2}{b^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{z^2}{\frac{1}{4}h^2\cot^2\frac{\alpha}{2}}=1,$$

équation d'un hyperboloïde rapporté à son centre et à ses axes.

2. On arrive presque sans calcul au même résultat de la manière suivante :

Soient toujours les mêmes axes : par le point D, élevons $DD' = h$ perpendiculaire au plan de l'ellipse, et joignons D'E. La plus courte distance des droites D'E et OZ est constante et égale à la distance de la corde DE au centre du cercle, c'est-à-dire à $a \cos \frac{\alpha}{2}$; la ligne D'E a, sur le plan de l'ellipse, une inclinaison constante dont la tangente est $\frac{h}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$. Quand l'angle DOE tourne autour du point O, la droite D'E engendre donc un hyperboloïde de révolution à une nappe, dont le cercle de gorge, situé à la distance $\frac{h}{2}$ au-dessus du plan de l'ellipse, a un rayon égal à $a \cos \frac{\alpha}{2}$, hyperboloïde qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{y^2}{a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{z^2}{\frac{1}{4} h^2 \cot^2 \frac{\alpha}{2}} = 1.$$

La surface engendrée par P'Q s'en déduit, en réduisant les y dans le rapport $\frac{b}{a}$. On obtiendra donc son équation en remplaçant dans la précédente y par $\frac{a}{b} y$, ce qui donne

$$\frac{x^2}{a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{y^2}{b^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{z^2}{\frac{1}{4} h^2 \cot^2 \frac{\alpha}{2}} = 1.$$