NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. DE SAINT-GERMAIN

Sur les points d'inflexion d'une courbe du troisième degré

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 356-357

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__356_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SUR LES POINTS D'INFLEXION D'UNE COURBE DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Voici un moyen facile d'établir que, sur les neuf points d'inflexion d'une cubique, trois au plus sont réels. Soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ les tangentes en trois de ces points supposés réels, et situés sur la droite

$$P = a\alpha + b\beta + c\gamma = 0;$$

l'équation de la cubique donnée peut s'écrire

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = P^3 + 6\alpha\beta\gamma = 0. \tag{1}$$

On démontre de bien des manières que ses points d'inflexion sont sur la courbe

$$\begin{vmatrix} F''_{\alpha^2} & F''_{\alpha\beta} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & F''_{\beta\gamma} & F''_{\gamma^2} \end{vmatrix} = 0,$$

soit, ici,

$$\begin{vmatrix} a^2P & abP + \gamma & acP + \beta \\ abP + \gamma & b^2P & bcP + \alpha \\ acP + \beta & bcP + \alpha & c^2P \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant symétrique a un développement bien connu

$$a^2b^2c^2P^3 - a^2P(bcP + \alpha)^2 - b^2P(caP + \beta)^2$$
$$- c^2P(abP + \gamma)^2 + 2(bcP + \alpha)(caP + \beta)(abP + \gamma) = 0.$$

Réduisant,

$$P(2bc\beta\gamma + 2ca\gamma\alpha + 2ab\alpha\beta - a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 - c^2\gamma^2) + 2\alpha\beta\gamma = 0.$$

Je triple cette équation et je la retranche de l'équation (1), où j'ai remplacé un facteur P^2 par son développement, ce qui me donne un nouveau lieu des points d'inflexion :

$$4P(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 - bc\beta\gamma - ca\gamma\alpha - ab\alpha\beta) = 0.$$

On retrouve la droite donnée et un système de droites imaginaires :

$$(b\beta - c\gamma)^2 + (c\gamma - a\alpha)^2 + (a\alpha - b\beta)^2 = 0.$$

Ces droites coupent la cubique aux six points d'inflexion qu'il restait à trouver et qui sont nécessairement imaginaires. On peut voir que le centre de l'ellipse évanouissante est le pôle de la droite $P = 0$, par rapport aux trois couples de tangentes aux points réels d'inflexion.