NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. KORKINE
G. ZOLOTAREFF

Sur un certain minimum

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 337-355
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__337_0>

SUR UN CERTAIN MINIMUM;

PAR MM. A. KORKINE ET G. ZOLOTAREFF,
Professeurs à l'Université de Saint-Pétersbourg.

1. Soit $f(x)$ une fonction entière de x de la forme

(1) $$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant des constantes réelles.

En désignant par

$$[A]$$

la valeur absolue de la quantité réelle A, nous nous proposons de déterminer les coefficients

$$a_1, \quad a_2, \ldots, \quad a_n$$

de $f(x)$, de sorte que l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)]\,dx$$

ait la valeur minimum.

2. En supposant maintenant que, de tous les polynômes du $n^{ième}$ degré de la forme (1), $f(x)$ soit celui pour lequel l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)]\,dx$$

est minimum, nous allons démontrer que toutes les n racines de l'équation

$$f(x) = 0$$

sont réelles, inégales et comprises entre -1 et $+1$.

On voit d'abord que cette équation n'a pas de racines imaginaires.

En effet, en supposant

$$f(x) = \{(x-\alpha)^2 + \beta^2\}^p f_1(x),$$

$f_1(x)$ étant un polynôme du degré $n - 2p$, qui n'est pas divisible par

$$(x-\alpha)^2 + \beta^2,$$

et p un nombre entier positif, on aura

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)]\,dx = \int_{-1}^{+1} \{(x-\alpha)^2 + \beta^2\}^p [f_1(x)]\,dx.$$

Or, la quantité β étant différente de zéro, on peut diminuer β^2 sans changer la forme (1) du polynôme $f(x)$, et, par suite, on diminuera la valeur de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)]\,dx,$$

qui ne sera pas, par conséquent, minimum, contrairement à notre supposition.

On verra de la même manière que toutes les racines de l'équation

$$f(x) = 0$$

sont comprises entre -1 et $+1$.

En effet, si l'on avait

$$f(x) = (x-\alpha)^p F(x),$$

α étant supérieur à 1 en valeur absolue, p un nombre entier positif et $F(x)$ un polynôme entier du degré $n-p$, on pourrait diminuer la valeur absolue de α et, par suite, celle de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)]\,dx,$$

qui est égale à

$$\int_{-1}^{+1} \{[\alpha]-x\}^p [F(x)]dx$$

dans le cas de α positif, et à

$$\int_{-1}^{+1} \{[\alpha]+x\}^p [F(x)]dx$$

si α est négatif; ce qui est impossible en vertu de la supposition.

Il ne sera pas non plus difficile de démontrer que l'équation

$$f(x)=0$$

a toutes ses racines inégales.

Supposons

$$f(x)=(x-\alpha)^2 F_1(x),$$

α étant compris entre -1 et $+1$, et $F_1(x)$ un polynôme du degré $n-2$, qui peut être encore divisible par $x-\alpha$.

Considérons la fonction

$$f_1(x)=\{(x-\alpha)^2-h^2\} F_1(x),$$

où h est une quantité infiniment petite. Comme la valeur absolue de

$$(x-\alpha)^2-h^2$$

est moindre que celle de

$$(x-\alpha)^2,$$

si x n'est pas compris entre

$$\alpha-h \quad \text{et} \quad \alpha+h$$

et la différence

$$(x-\alpha)^2-\{(x-\alpha)^2-h^2\}$$

ou h^2, l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [f_1(x)]\, dx$$

est inférieure à l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)]\, dx,$$

et leur différence est une quantité infiniment petite du second ordre par rapport à h; car les intégrales

$$\int_{\alpha-h}^{\alpha+h} [f(x)]\, dx, \quad \int_{\alpha-h}^{\alpha+h} [f_1(x)]\, dx$$

sont du troisième ordre.

Donc, en variant infiniment peu les coefficients de $f(x)$, on diminuera la valeur de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)]\, dx,$$

qui ne sera pas, par conséquent, minimum.

Ainsi toutes les racines de l'équation

$$f(x) = 0$$

sont réelles, inégales et comprises entre -1 et $+1$.

3. Soient

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_n$$

ces racines; on aura

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)]\, dx = (-1)^n \left\{ \int_{-1}^{\alpha_1} f(x)\, dx - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)\, dx + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} f(x)\, dx - \ldots + (-1)^n \int_{\alpha_n}^{1} f(x)\, dx \right\}.$$

En désignant, pour abréger, la formule

$$\int_{-1}^{\alpha_1} \varphi(x)\,dx - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varphi(x)\,dx + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \varphi(x)\,dx - \ldots$$
$$+ (-1)^n \int_{\alpha_n}^{1} \varphi(x)\,dx$$

par

$$S\varphi(x)\,dx,$$

il viendra

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)]\,dx = (-1)^n Sf(x)\,dx.$$

L'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)]\,dx$$

peut être considérée comme fonction des coefficients

$$a_1, \quad a_2, \ldots, \quad a_n,$$

car les racines

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots, \quad \alpha_n$$

en sont également des fonctions.

On déterminera les valeurs de

$$a_1, \quad a_2, \ldots, \quad a_n,$$

qui rendent l'intégrale

$$(-1)^n Sf(x)\,dx$$

minimum, par les équations

$$\frac{\partial Sf(x)\,dx}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial Sf(x)\,dx}{\partial a_2} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial Sf(x)\,dx}{\partial a_n} = 0,$$

d'après les règles connues du Calcul différentiel.

En effectuant les différentiations, on aura

$$Sx^{n-1}\,dx = 0, \quad Sx^{n-2}\,dx = 0, \ldots, \quad S\,dx = 0.$$

Ces équations, écrites dans l'ordre inverse, deviennent

$$(2)\quad \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \ldots \pm \alpha_n = \varepsilon_1, \\ \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \ldots \pm \alpha_n^2 = \varepsilon_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_1^n - \alpha_2^n + \alpha_3^n - \ldots \pm \alpha_n^n = \varepsilon_n, \end{cases}$$

où, pour un indice quelconque λ, on a

$$\varepsilon_\lambda = \frac{(-1)^\lambda + (-1)^{n+1}}{2}.$$

4. Nous allons maintenant démontrer que les équations (2) ne peuvent être satisfaites que par un seul système de valeurs

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots, \quad \alpha_n,$$

dans lequel

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_n.$$

Supposant, en effet, qu'il y en ait deux

$$(3)\quad \begin{cases} \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_n, \\ \alpha'_1 < \alpha'_2 < \alpha'_3 < \ldots < \alpha'_n, \end{cases}$$

on aura aussi

$$\begin{gathered} \alpha'_1 - \alpha'_2 + \alpha'_3 - \ldots \pm \alpha'_n = \varepsilon_1, \\ \alpha'^2_1 - \alpha'^2_2 + \alpha'^2_3 - \ldots \pm \alpha'^2_n = \varepsilon_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha'^n_1 - \alpha'^n_2 + \alpha'^n_3 - \ldots \pm \alpha'^n_n = \varepsilon_n; \end{gathered}$$

donc il viendra

$$(4)\quad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha'_2 + \alpha_3 + \alpha'_4 + \ldots = \alpha'_1 + \alpha_2 + \alpha'_3 + \alpha_4 + \ldots, \\ \alpha_1^2 + \alpha'^2_2 + \alpha_3^2 + \alpha'^2_4 + \ldots = \alpha'^2_1 + \alpha_2^2 + \alpha'^2_3 + \alpha_4^2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_1^n + \alpha'^n_2 + \alpha_3^n + \alpha'^n_4 + \ldots = \alpha'^n_1 + \alpha_2^n + \alpha'^n_3 + \alpha_4^n + \ldots. \end{cases}$$

Il en résulte que les deux suites

$$\alpha_1, \quad \alpha'_2, \quad \alpha_3, \quad \alpha'_4, \ldots,$$
$$\alpha'_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha'_3, \quad \alpha_4, \ldots$$

sont composées des mêmes quantités.

Cela devient évident en remarquant que chacune de ces suites contient les n racines d'une seule et même équation du degré n, ce qui résulte immédiatement des équations (4).

Cela admis, on voit sans difficulté que, en vertu des inégalités (3), on aura

$$x_1 = \alpha'_1, \quad x_2 = \alpha'_2, \ldots,$$

et les deux systèmes (3) sont identiques.

5. Nous ferons voir maintenant que la fonction $f(x)$ contient les seuls degrés pairs de x, lorsque n est pair, et les seuls degrés impairs, si n est impair.

En effet, le polynôme

$$(-1)^n f(-x),$$

étant de la forme

$$x^n + \ldots,$$

donne encore une solution de la question proposée, car on a

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)]\,dx = \int_{-1}^{+1} [(-1)^n f(-x)]\,dx.$$

Donc les racines

$$-\alpha_1, \quad -\alpha_2, \ldots, \quad -\alpha_n$$

de l'équation

$$f(-x) = 0$$

satisfont aux équations (2), et, d'après ce qui a été dit dans le n° 4, elles ne diffèrent que par l'ordre des quantités

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots, \quad \alpha_n.$$

Comme on a

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n,$$

il viendra

$$-\alpha_n < -\alpha_{n-1} < \ldots < -\alpha_1.$$

Il s'ensuit

$$\alpha_1 = -\alpha_n, \quad \alpha_2 = -\alpha_{n-1}, \ldots.$$

Ainsi on aura

$$f(x) = (-1)^n f(-x),$$

quel que soit x, et la proposition énoncée est démontrée.

6. Avant de chercher la solution des équations générales (2), considérons quelques cas particuliers.

Pour $n = 1$, on aura évidemment

$$f(x) = x.$$

Pour $n = 2$, on aura

$$\alpha_1 = -\alpha_2, \quad 2\alpha_1 = -1, \quad \alpha_1^2 - \alpha_2^2 = 0,$$
$$f(x) = x^2 - \tfrac{1}{4}.$$

Pour $n = 3$, on aura

$$\alpha_1 = -\alpha_3, \quad \alpha_2 = 0, \quad 2\alpha_1^2 = 1,$$
$$f(x) = x^3 - \tfrac{1}{2}x.$$

Pour $n = 4$, on obtient

$$\alpha_1 = -\alpha_4, \quad \alpha_2 = -\alpha_3, \quad 2(\alpha_1 - \alpha_2) = -1, \quad 2(\alpha_1^3 - \alpha_2^3) = -1.$$

On trouve aisément une fonction

$$(x - \alpha_1)(x + \alpha_2),$$

quand les deux sommes

$$\alpha_1 - \alpha_2, \quad \alpha_1^3 - \alpha_2^3$$

sont données. En effet, il vient

$$(x - \alpha_1)(x + \alpha_2) = x^2 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}$$

et, par suite,

$$(x + \alpha_1)(x - \alpha_2) = x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}.$$

Donc

$$f(x) = (x^2 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4})(x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}) = x^4 - \tfrac{3}{4}x^2 + \tfrac{1}{16}.$$

Les résultats trouvés sont contenus dans cette formule générale

$$f(x) = \frac{1}{2^n}\frac{\sin\{(n+1)\arccos x\}}{\sqrt{1-x^2}},$$

que nous allons vérifier.

7. Soit u une fonction de x, qui, étant développée suivant les puissances descendantes de x, commence par le terme

$$\frac{A}{x},$$

où A est une constante différente de zéro. Soit encore $\varphi(x)$ une fonction entière du degré $n+1$, telle que, dans le produit

$$u\varphi(x)$$

développé suivant les puissances descendantes de x, les termes en

$$x^{-1}, \quad x^{-2}, \ldots, \quad x^{-(n+1)}$$

manquent. On aura

$$(5) \qquad u\varphi(x) = \psi(x)(1 + \varepsilon),$$

$\psi(x)$ étant une fonction entière du degré n et ε une fonction de la forme

$$\frac{B}{x^{2n+2}} + \frac{C}{x^{2n+3}} + \cdots.$$

Désignons par

$$c_1, \quad c_2, \ldots, \quad c_n$$

les n racines de l'équation

$$\psi(x) = 0.$$

Il viendra

$$\frac{\varphi(x)}{x - c_\iota} = \text{fonction entière} + \frac{\varphi(c_\iota)}{x} + \frac{c_\iota \varphi(c_\iota)}{x^2} + \frac{c_\iota^2 \varphi(c_\iota)}{x^3} + \cdots,$$

et de là

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{\iota=1}^{\iota=n} \frac{\varphi(x)}{x - c_\iota} = \varphi(x)\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} &= \text{fonction entière} \\ &+ \frac{\Sigma\varphi(c_\iota)}{x} + \frac{\Sigma c_\iota \varphi(c_\iota)}{x^2} + \frac{\Sigma c_\iota^2 \varphi(c_\iota)}{x^3} + \cdots. \end{aligned} \right.$$

Or de l'équation (5) on déduit

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{u'}{u} = \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} + \frac{\varepsilon'}{1 + \varepsilon},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\varphi'(x) + \varphi(x)\frac{u'}{u} = \varphi(x)\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} + \frac{\varphi(x)\varepsilon'}{1 + \varepsilon}.$$

La fonction

$$\frac{\varphi(x)\varepsilon'}{1 + \varepsilon}$$

étant de la forme

$$\frac{k}{x^{n+2}} + \frac{l}{x^{n+3}} + \cdots,$$

il s'ensuit que les termes avec les puissances

$$x^{-1}, \quad x^{-2}, \ldots, \quad x^{-(n+1)},$$

dans les développements des deux fonctions

$$\varphi(x)\frac{u'}{u}, \quad \varphi(x)\frac{\psi'(x)}{\psi(x)},$$

suivant les puissances descendantes de x, sont les mêmes.

Ainsi, en ayant égard à l'équation (6), on voit que les sommes

$$\Sigma\,\varphi(c_i), \quad \Sigma\,c_i\varphi(c_i), \quad \Sigma\,c_i^2\,\varphi(c_i), \ldots, \quad \Sigma\,c_i^n\,\varphi(c_i)$$

sont les coefficients des termes en

$$\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^2}, \ldots, \quad \frac{1}{x^{n+1}}$$

dans le développement de la fonction

$$\varphi(x)\frac{u'}{u}.$$

8. En faisant maintenant

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

on aura

$$\varphi(x) = \frac{1}{2^n}\cos\{(n+1)\arccos x\},$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2^n}\,\frac{\sin\{(n+1)\arccos x\}}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\varphi(x)\frac{u'}{u} = -\,x\,\frac{\varphi(x)}{x^2 - 1}.$$

En divisant $\varphi(x)$ par $x^2 - 1$, on aura une équation de la forme

$$\varphi(x) = (x^2 - 1)\,F(x) + Ax + B,$$

$F(x)$ étant une fonction entière.

On déterminera A et B en faisant dans cette équation

$$x = -1 \quad \text{et} \quad x = +1;$$

il viendra

$$B - A = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}, \quad B + A = \frac{1}{2^n},$$

et, par suite,

$$B = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2^{n+1}}, \quad A = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2^{n+1}}.$$

On aura de plus

$$(7) \left\{ \begin{aligned} \varphi(x)\frac{u'}{u} &= -x\frac{\varphi(x)}{x^2-1} = -xF(x) - A - \frac{Bx+A}{x^2-1} \\ &= -\left\{ A + xF(x) + \frac{B}{x} + \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x^3} \right. \\ &\qquad \left. + \frac{A}{x^4} + \frac{B}{x^5} + \frac{A}{x^6} + \ldots \right\}. \end{aligned} \right.$$

Les racines de l'équation

$$\psi(x) = 0$$

étant

$$\cos\frac{\pi}{n+1}, \quad \cos\frac{2\pi}{n+1}, \quad \cos\frac{3\pi}{n+1}, \ldots, \quad \cos\frac{n\pi}{n+1},$$

faisons

$$\alpha_i = \cos\frac{(n-i+1)\pi}{n+1},$$

et nous aurons

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_n,$$

$$\varphi(\alpha_i) = \frac{1}{2^n}(-1)^{n-i+1} = \frac{1}{2^n}(-1)^{n+i+1}.$$

En vertu de la proposition du n° 7, en ayant égard à l'équation (7), on voit que la somme

$$\Sigma \alpha_i^\lambda \varphi(\alpha_i) = -\frac{1}{2^n}(-1)^{n+1}\Sigma(-1)^{i-1}\alpha_i^\lambda$$

est égale à $-$B si le nombre entier λ est pair, et à $-$A si λ est impair.

On aura donc

$$-\frac{1}{2^n}(-1)^{n+1}\Sigma(-1)^{i-1}\alpha_i^\lambda = -\frac{1+(-1)^{n+1+\lambda}}{2^{n+1}},$$

car le second terme de cette équation se réduit à $-$B lorsque λ est pair, et à $-$A dans le cas contraire.

On déduit de là

$$\Sigma(-1)^{i-1}\alpha_i^\lambda = \frac{(-1)^\lambda + (-1)^{n+1}}{2} = \varepsilon_\lambda.$$

En faisant ici

$$\lambda = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

on obtient les équations (2), et la formule

$$f(x) = \frac{1}{2^n}\,\frac{\sin\{(n+1)\arccos x\}}{\sqrt{1-x^2}}$$

est vérifiée.

9. Dans ce qui précède, nous avons donné la solution complète de la question que nous nous étions proposée. Comme elle a été trouvée par induction, il ne sera pas sans intérêt de la vérifier d'une manière plus directe.

En reprenant les équations

$$\mathrm{S}\,dx = 0,\quad \mathrm{S}\,x\,dx = 0,\quad \mathrm{S}\,x^2 dx = 0, \ldots,\quad \mathrm{S}\,x^{n-1} dx = 0$$

du n° 3, dont la solution comprend celle de la question proposée, on voit facilement que le développement de l'intégrale

$$\mathrm{S}\frac{dz}{x-z} = \frac{\mathrm{S}\,dz}{x} + \frac{\mathrm{S}\,z\,dz}{x^2} + \frac{\mathrm{S}\,z^2 dz}{x^3} + \ldots$$

doit commencer, en vertu de ces équations, par le terme

$$\frac{\mathrm{S}z^n dz}{x^{n+1}}.$$

Supposons, en premier lieu, n impair. En faisant, pour abréger,

$$\mathrm{U} = (x - \alpha_2)(x - \alpha_4)\ldots(x - \alpha_{n-1}),$$
$$\mathrm{V} = (x - \alpha_1)(x - \alpha_3)\ldots(x - \alpha_n),$$

on aura facilement, en effectuant l'intégration,

$$\mathrm{S}\frac{dz}{x-z} = \log\frac{\mathrm{U}^2(x^2-1)}{\mathrm{V}^2} = \log\left\{1 + \frac{(x^2-1)\mathrm{U}^2 - \mathrm{V}^2}{\mathrm{V}^2}\right\}.$$

Pour que le développement de

$$\mathrm{S}\frac{dz}{x-z}$$

commence par le terme

$$\frac{\mathrm{S}z^n dz}{x^{n+1}},$$

il faut que celui de la fonction

$$\frac{(x^2-1)\mathrm{U}^2 - \mathrm{V}^2}{\mathrm{V}^2}$$

soit de la forme

$$\frac{\mathrm{A}}{x^{n+1}} + \frac{\mathrm{B}}{x^{n+2}} + \ldots.$$

Or, V^2 étant un polynôme du degré $n+1$, il faut que la différence

$$(x^2-1)\mathrm{U}^2 - \mathrm{V}^2$$

ait une valeur constante.

On aura ainsi l'équation indéterminée

$$(x^2-1)\mathrm{U}^2 - \mathrm{V}^2 = \text{const.}$$

En faisant $x = \cos\varphi$, on tire de là, par des méthodes connues,

$$U = \pm C \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\varphi\right)}{\sin\varphi},$$

$$V = \pm C \cos\left(\frac{n+1}{2}\varphi\right),$$

$$f(x) = UV = \pm \frac{1}{2} C^2 \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi},$$

C étant une constante. Comme la fonction $f(x)$ est de la forme

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots,$$

il viendra

$$\pm \frac{1}{2} C^2 = \frac{1}{2^n}.$$

Ainsi, pour n impair, on a

$$f(x) = \frac{1}{2^n} \frac{\sin\{(n+1)\operatorname{arc}\cos x\}}{\cos x}.$$

Soit, en second lieu, n pair. En faisant maintenant

$$U = (x - \alpha_2)(x - \alpha_4)\ldots(x - \alpha_n),$$
$$V = (x - \alpha_1)(x - \alpha_3)\ldots(x - \alpha_{n-1}),$$

on aura

$$S\frac{dz}{x-z} = \log\frac{(x+1)U^2}{(x-1)V^2} = \log\left\{1 + \frac{(x+1)U^2 - (x-1)V^2}{(x-1)V^2}\right\}.$$

En remarquant, comme précédemment, que le développement de

$$S\frac{dz}{x-z}$$

doit commencer par le terme

$$\frac{S z^n dz}{x^{n+1}},$$

et que le polynôme $(x-1)V^2$ est du degré $n+1$, on conclura que la différence

$$(x+1)U^2-(x-1)V^2$$

est une constante.

On aura de la sorte

$$(x+1)U^2-(x-1)V^2=\text{const.}$$

En faisant $x=\cos\varphi$, on tire de là, sans difficulté,

$$U=\pm C\frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\varphi\right)}{\cos\frac{\varphi}{2}},\quad V=\pm C\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\varphi\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}},$$

$$f(x)=UV=\pm C^2\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi},$$

où C est une constante.

On trouve encore

$$\pm C^2=\frac{1}{2^n},$$

et l'on aura, comme dans le cas précédent,

$$f(x)=\frac{1}{2^n}\,\frac{\sin\{(n+1)\operatorname{arccos}x\}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

10. Notre fonction $f(x)$ appartient à une classe de polynômes qu'on peut définir comme il suit :

Considérons l'intégrale

$$u=\int_{-1}^{+1}\frac{F(z)\,dz}{x-z},$$

où $F(z)$ est une fonction réelle et positive entre les limites $z=-1$ et $z=+1$, et soient $\psi(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions entières, dont la dernière du degré m, telles que la différence

$$u\varphi(x)-\psi(x),$$

développée suivant les puissances descendantes de x, soit de la forme

$$\frac{A}{x^{m+1}} + \frac{B}{x^{m+2}} + \ldots.$$

Les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ constituent deux classes de polynômes, et $f(x)$ appartient à la seconde. En effet, si l'on suppose

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad m = n + 1,$$

le polynôme $\psi(x)$ correspondant ne diffère de $f(x)$ que par un facteur constant. Les propriétés des fonctions $\varphi(x)$ ont été étudiées par plusieurs géomètres; celles des polynômes $\psi(x)$ sont jusqu'à présent très-peu connues.

Nous allons démontrer la propriété fondamentale des fonctions $\psi(x)$, qui consiste en ce que *les racines de l'équation*

$$\psi(x) = 0$$

sont réelles, inégales et comprises entre -1 et $+1$. On sait, par la théorie de l'intégrale u, que les racines de l'équation

$$\varphi(x) = 0$$

ont également cette propriété.

Nous empruntons à cette théorie les équations

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{-1}^{+1} \varphi(z) F(z)\, dz = 0, \\ \displaystyle\int_{-1}^{+1} z\varphi(z) F(z)\, dz = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \displaystyle\int_{-1}^{+1} z^{m-1}\varphi(z) F(z)\, dz = 0, \end{array} \right.$$

$$\psi(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x) - \varphi(z)}{x - z} F(z)\,dz, \tag{9}$$

sur lesquelles sera fondée notre démonstration.

Désignons par $v(x)$ la fonction entière

$$\frac{\varphi(x)}{x-\alpha} = A_0 x^{m-1} + A_1 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1},$$

$x - \alpha$ étant un des facteurs de $\varphi(x)$.

Soient encore

$$C_0 = \int_{-1}^{+1} v(z)\,F(z)\,dz,$$

$$C_1 = \int_{-1}^{+1} z v(z)\,F(z)\,dz,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$C_m = \int_{-1}^{+1} z^m v(z)\,F(z)\,dz.$$

On a entre les C_i des relations simples exprimées par les équations

$$C_i = \alpha C_{i-1} \;(i = 1, 2, 3, \ldots, m),$$

car il est évident que la différence

$$C_i - \alpha C_{i-1} = \int_{-1}^{+1} z^{i-1}(z-\alpha)\,v(z)\,F(z)\,dz$$
$$= \int_{-1}^{+1} z^{i-1}\varphi(z)\,F(z)\,dz$$

s'annule en vertu des équations (8). On obtient de la sorte

$$C_1 = \alpha C_0, \quad C_2 = \alpha C_1 = \alpha^2 C_0, \ldots, \quad C_m = \alpha^m C_0.$$

En multipliant les équations

$$C_{m-1} = \alpha^{m-1} C_0 = \int_{-1}^{+1} z^{m-1} \nu(z) F(z)\, dz,$$

$$C_{m-2} = \alpha^{m-2} C_0 = \int_{-1}^{+1} z^{m-2} \nu(z) F(z)\, dz,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$C_1 = \alpha C_0 = \int_{-1}^{+1} z \nu(z) F(z)\, dz,$$

$$C_0 = C_0 = \int_{-1}^{+1} \nu(z) F(z)\, dz$$

respectivement par les coefficients

$$A_0, \quad A_1, \ldots, \quad A_{m-2}, \quad A_{m-1}$$

de la fonction $\nu(z)$, on aura

$$C_0 \nu(\alpha) = C_0 \varphi'(\alpha) = \int_{-1}^{+1} \{\nu(z)\}^2 F(z)\, dz = \psi(\alpha)\varphi'(\alpha);$$

car on a évidemment, d'après (9),

$$C_0 = \int_{-1}^{+1} \nu(z) F(z)\, dz = \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(z)}{z-\alpha} F(z)\, dz = \psi(\alpha).$$

L'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \{\nu(z)\}^2 F(z)\, dz$$

étant positive, on en conclut que $\psi(\alpha)$ et $\varphi'(\alpha)$ sont des quantités de même signe.

Il s'ensuit, en vertu du théorème connu de Rolle, que les racines de l'équation

$$\psi(x) = 0$$

sont réelles, inégales et comprises entre -1 et $+1$, chaque racine en particulier étant comprise entre deux racines consécutives de l'équation $\varphi(x) = 0$.
