Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 328-335

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__328_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1049

(voir 2ᵉ série, t. X, p. 557)

PAR M. DOUCET.

C'est une propriété des coniques, que les sommets des angles droits circonscrits à ces courbes appartiennent à une circonférence; trouver les courbes qui ont la même propriété. (L. KIEPERS.)

Soient

$$y = px + f(p),$$

$$y = -\frac{1}{p}x + f\left(-\frac{1}{p}\right)$$

les équations, rapportées à deux axes rectangulaires, des côtés d'un angle droit circonscrit à une certaine courbe.

Après avoir écrit les deux équations comme il suit :

$$y - px = f(p),$$
$$py + x = pf\left(-\frac{1}{p}\right),$$

élevons-les au carré et ajoutons-les membre à membre ; il en résulte

$$(x^2 + y^2)(1 + p^2) = \overline{f(p)}^2 + p^2 \overline{f\left(-\frac{1}{p}\right)}^2,$$

et, si le point de concours des tangentes doit décrire la circonférence $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, on a

$$R^2(1 + p^2) = \overline{f(p)}^2 + p^2 \overline{f\left(-\frac{1}{p}\right)}^2,$$

ou

$$\frac{R^2 - \overline{f(p)}^2}{p} = \frac{R^2 - \overline{f\left(-\frac{1}{p}\right)}^2}{-\frac{1}{p}}.$$

Soit donc $\frac{R^2 - \overline{f(p)}^2}{p} = F(p)$; la fonction F conserve la même valeur, quand on y change p en $-\frac{1}{p}$. C'est une fonction entièrement arbitraire de $p - \frac{1}{p}$. Posons donc

$$\frac{R^2 - \overline{f(p)}^2}{p} = F\left(p - \frac{1}{p}\right),$$

d'où

$$f(p) = \sqrt{R^2 - pF\left(p - \frac{1}{p}\right)}.$$

Soit $p = \text{tang}\,\varphi$; F est une fonction arbitraire de $\text{tang}\,2\varphi$.

Les courbes que demande l'énoncé sont les enveloppes des droites

$$y = x \operatorname{tang}\varphi + \sqrt{R^2 + \operatorname{tang}\varphi\, F(\operatorname{tang} 2\varphi)}.$$

Les coniques correspondent au cas particulier où l'on prend, pour la fonction arbitraire F, l'expression

$$M + \frac{N}{\operatorname{tang} 2\varphi},$$

M et N désignant deux constantes. On obtient encore une hyperbole, en supposant constante la fonction F.

Note. — La même question a été résolue par M. E. Pellet.

Question 1055

(voir 2ᵉ série, t. XI, p. 48);

PAR M. C. MOREAU, à Constantine.

L'équation indéterminée $t^2 - Du^2 = 4$, *dans laquelle* D *est de la forme* $(4n+2)^2 + 1$, *n désignant un nombre entier positif quelconque* 1, 2, 3,..., *n'a aucune solution formée de deux nombres impairs, et la solution constituée par les deux nombres entiers positifs les plus petits est*

$$t = 16(2n+1)^2 + 2, \quad u = 8(2n+1).$$

(F. DIDON.)

Soit

$$4n + 2 = k,$$

l'équation proposée devient

$$k^2u^2 + u^2 + 4 = t^2;$$

t est donc plus grand que ku. Posons

$$t = ku + u,$$

il vient

$$u^2 + 4 = 2ku_1u + u_1^2,$$

ce qui montre que u_1 est de même parité que u et lui est inférieur, puisque k est au moins égal à 6. De plus, on tire de cette équation

$$u = ku_1 \pm \sqrt{k^2u_1^2 + u_1^2 - 4};$$

donc $k^2u_1^2 + u_1^2 - 4$ doit être un carré parfait. Posons de nouveau

$$(k^2u_1^2 + u_1^2 - 4) = (ku_1 + u_2)^2;$$

on verra, comme précédemment, que u_2 est de même parité que u_1 et lui est inférieur, et que la quantité

$$k^2u_2^2 + u_2^2 + 4$$

doit être un carré parfait.

On voit donc, en continuant le même raisonnement, que si $k^2u^2 + u^2 + 4$ est un carré parfait, il doit en être de même des quantités

$$k^2u_1^2 + u_1^2 - 4, \quad k^2u_2^2 + u_2^2 + 4, \quad k^2u_3^2 + u_3^2 - 4, \ldots,$$

dans lesquelles u_1, u_2, $u_3, \ldots$ sont de même parité que u et vont en décroissant. Si u pouvait être impair, il en serait de même des nombres u_1, u_2, $u_3, \ldots$, et, comme chacun de ces nombres est plus petit que le précédent et que 4 est plus petit que 3^2, il en résulte que l'un d'eux serait égal à l'unité, et que l'une des deux quantités $k^2 + 1 + 4$, $k^2 + 1 - 4$ devrait être un carré parfait, ce qui est impossible, puisque k est au moins égal à 6.

Si, au contraire, u est supposé pair, sa valeur trouvée précédemment en fonction de u_1 montre que son minimum correspond à $u_1 = 2$, ce qui donne

$$u = 2ku_1 = 4k = 8(2n + 1),$$

$$t = ku + u_1 = 4k^2 + 2 = 16(2n + 1)^2 + 2.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Lucien Bignon, à Lima; Moret-Blanc, au Havre; Brocard, à Constantine.

Question 1083

(voir 2e série, t. XI, p. 288);

PAR M. GENTY, à Oran.

On demande : 1° *quel est le lieu du sommet d'un angle droit dont chacun des côtés rencontre deux droites données ;* 2° *quelle est l'enveloppe du plan de cet angle droit.* (MANNHEIM.)

1° Soient D, d, D$'$, d' les deux couples de droites que doivent rencontrer respectivement les deux côtés de l'angle droit, je dis qu'elles font partie du lieu cherché.

En effet, soit Δ une droite quelconque, qui rencontre D, d, D$'$ aux points M, m, M$'$, respectivement. Par le point M menons un plan perpendiculaire à la droite Δ, et soit μ le point d'intersection de ce plan avec la droite d'.

Les droites Mμ et Δ forment entre elles un angle droit ; donc le point M est un point du lieu. Il en est de même évidemment des points m et M$'$; donc enfin les quatre droites données font partie du lieu.

Cherchons maintenant les autres points de la surface cherchée, situés sur la droite Δ.

Soit P le point de rencontre de la droite d' avec le plan des droites Δ et D$'$. Toute droite rencontrant à la fois Δ, D$'$ et d', passera par le point P ; il n'y a, par suite, qu'une seule de ces droites qui rencontre Δ sous un angle droit ; c'est la perpendiculaire PQ abaissée du point P sur la droite Δ.

Ainsi la droite Δ ne rencontre le lieu qu'en quatre points : donc ce lieu est une surface du quatrième ordre S.

La droite Δ engendre un hyperboloïde H, qui coupe la surface S suivant une courbe du huitième ordre. Or les directrices D, d, D$'$ font partie de l'intersection ; donc le lieu du point φ est une courbe gauche du cinquième ordre. Les génératrices de H ne rencontrent la courbe qu'en un seul point; les directrices la rencontrent en quatre points.

2° Le même raisonnement montre que l'enveloppe du plan de l'angle droit est une surface de la quatrième classe Σ.

Les droites données sont situées sur cette surface. En effet, le plan des droites D' et Δ est un des plans tangents à la surface enveloppe; donc les plans tangents à l'hyperboloïde H tout le long de la droite D' sont aussi tangents à la surface Σ; donc cette droite est située tout entière sur la surface.

Il en est évidemment de même des autres droites données. Il en résulte que la développable circonscrite aux surfaces H et Σ est de la cinquième classe. Par une génératrice quelconque de H, on ne peut mener qu'un plan tangent à cette développable, tandis que par une directrice quelconque on en peut mener quatre.

Question 1093

(voir 2e série, t. XI, p. 479);

PAR M. GAMBEY.

Un tétraèdre abcd étant conjugué à un paraboloïde, si l'on désigne par a', b', c' les points où les arêtes da, db, dc coupent le paraboloïde, on a

$$\left(\frac{da'}{aa'}\right)^2 + \left(\frac{db'}{bb'}\right)^2 + \left(\frac{dc'}{cc'}\right)^2 = 1.$$

(H. FAURE.)

Prenons pour axes de coordonnées les arêtes da, db, dc, et posons

$$da = a, \quad db = b, \quad dc = c,$$
$$da' = A, \quad db' = B, \quad dc' = C.$$

Il faut démontrer que l'on a

$$\left(\frac{A}{A-a}\right)^2+\left(\frac{B}{B-b}\right)^2+\left(\frac{C}{C-c}\right)^2=1.$$

Les équations des quatre faces du tétraèdre et celle des surfaces du second ordre, conjuguées à ce tétraèdre, sont

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

$$lx^2+my^2+nz^2+p\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1\right)^2=0.$$

Ces surfaces seront des paraboloïdes, si l'on a

$$(1)\qquad \frac{1}{a^2l}+\frac{1}{b^2m}+\frac{1}{c^2n}+\frac{1}{p}=0.$$

On doit avoir de plus

$$lA^2+p\left(\frac{A}{a}-1\right)^2=0,$$

$$mB^2+p\left(\frac{B}{b}-1\right)^2=0,$$

$$nC^2+p\left(\frac{C}{c}-1\right)^2=0,$$

ou, en multipliant respectivement par a^2, b^2, c^2,

$$lA^2a^2+p(A-a)^2=0,$$
$$mB^2b^2+p(B-b)^2=0,$$
$$nC^2c^2+p(C-c)^2=0.$$

Tirant de là les valeurs de a^2l, b^2m, c^2n, et les substituant dans (1), on trouve

$$\left(\frac{A}{A-a}\right)^2+\left(\frac{B}{B-b}\right)^2+\left(\frac{C}{C-c}\right)^2=1.$$

C. Q. F. D.

Remarque. — Dans les surfaces à centre, on doit avoir constamment

$$\left(\frac{A}{A-a}\right)^2 + \left(\frac{B}{B-b}\right)^2 + \left(\frac{C}{C-c}\right)^2 \lesseqgtr 1.$$