Nouvelles annales de mathématiques

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 319-324

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__319_1>

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Genty, à Oran. — On peut donner une démonstration géométrique très-simple des théorèmes énoncés par M. Painvin, t. X, 2[e] série, p. 481, dont le premier a été rectifié dans la livraison de juillet des *Annales*.

Je donnerai les démonstrations relatives aux courbes; le lecteur trouvera facilement lui-même les démonstrations des théorèmes relatifs aux surfaces.

THÉORÈME I. — Soient donnés deux points fixes A et B, et une courbe fixe Σ d'ordre m; on imagine un point M se déplaçant sur la courbe Σ, puis, avec deux autres points fixes A' et B', on construit dans le plan un triangle A'B'S, tel qu'on ait toujours, quelle que soit la position du point M sur la courbe Σ,

$$SA' = MA, \quad SB' = MB :$$

le point S décrira une courbe (S) d'ordre $2m$ en général.

Les points M et S seront dits *correspondants*. A un point M de Σ correspondent deux points S et S' du lieu (S); ce sont les points d'intersection de deux cercles ayant les points A' et B' pour centres, et pour rayons les longueurs MA et MB respectivement. Donc la droite A'B' est un axe de la courbe (S).

Remarquons maintenant qu'à un cercle Γ ayant son centre au point A correspond un cercle (C) ayant son centre au point A'. Or le cercle Γ rencontre Σ en $2m$ points; à chacun de ces points en correspondent deux autres, qui sont des points d'intersection du cercle (C) avec la courbe (S); il y a en tout $4m$ points semblables : donc la courbe (S) est en général d'ordre $2m$.

On aurait pu aussi démontrer le théorème, en remarquant que les points d'intersection de la droite A'B' avec le lieu (S) correspondent aux points d'intersection de Σ avec une conique ayant pour foyers les points A et B, et dont le grand axe est égal à A'B'.

La seconde partie du théorème résulte immédiatement du théorème suivant, qui est très-connu, puisque c'est celui qu'on applique pour démontrer géométriquement les propriétés principales des tangentes aux coniques.

Théorème II. — Soient A et B deux points fixes dans le plan d'une courbe, M et M' deux points infiniment voisins de cette courbe. Si l'on prend sur MA et sur MB des longueurs Ma et Mb respectivement proportionnelles aux différences AM — AM', et BM — BM', la résultante des droites Ma et Mb est la normale à la courbe au point M.

Extrait d'une Lettre de M. H. Laurent. — M. Bienaymé, qui a bien voulu jeter un coup d'œil sur la Note que j'ai insérée dans ce Journal au sujet du principe de la probabilité composée, m'a fait observer que la solution que j'avais donnée était inexacte, et que la véritable solution était précisément celle dont je critiquais l'exactitude.

Quoi qu'il en soit, l'objection que l'on peut faire à la démonstration de Laplace subsiste tout entière; la voici :

« ... Nommons p le nombre des cas possibles relatifs au premier événement et p' celui des cas qui lui sont favorables; nommons ensuite q le nombre des cas possibles relatifs au second événement, qui correspondent à chacun des cas p, et q' le nombre des cas qui lui sont favorables.

» Le nombre des cas possibles relatifs à l'événement composé sera évidemment pq, et le nombre des cas favorables à cet événement sera $p'q'$; sa possibilité sera donc $\frac{p'q'}{pq}$ » $\left(\text{ou } \frac{p'}{p}\,\frac{p'q'}{p'q}\right)$. « Or $\frac{p'}{p}$ est la probabilité du premier événement, et $\frac{p'q'}{p'q}$ est la probabilité que, le premier événement étant arrivé, le second aura lieu.... »

Il m'a semblé que, si la manière dont le premier événement se présente peut influer sur le nombre des cas possibles relatifs au second, la démonstration précédente tombe en défaut; parce que, q n'étant plus constant, il est dépourvu de sens de dire que le nombre total des cas possibles est pq.

Laplace, dans une nouvelle édition de son Ouvrage, donne une démonstration plus rigoureuse :

Si l'on considère l'ensemble des P cas possibles qui peuvent se présenter quand on attend l'événement composé, f de ces cas seront favorables au premier événement et f' cas parmi ceux-ci seront favorables au second quand le premier aura eu lieu, en sorte que

$$\frac{f'}{P} = \frac{f'}{f}\,\frac{f}{P}$$

sera la probabilité cherchée. Or $\frac{f}{P}$ est la probabilité du premier événement, $\frac{f'}{f}$ celle du second quand le premier a eu lieu. Donc, etc.

Dans l'exemple que j'avais choisi, j'avais admis, sans le démontrer, que les cas que j'avais considérés étaient également possibles; ils l'eussent été, si l'on avait voulu en faire la convention à l'avance; mais alors il n'aurait plus fallu admettre que les billes tombaient avec la même facilité dans les deux compartiments de la boîte considérée; alors le principe de la probabilité composée n'eût plus été applicable, mais seulement parce qu'il eût été difficile d'apprécier la probabilité du premier événement composant.

Extrait d'une Lettre de M. Moreau, à Constantine. — Je n'ai pas lu sans étonnement la Note, sur un passage de la théorie analytique des probabilités, insérée dans le numéro d'avril dernier, p. 176.

Personne, jusqu'à présent, n'avait songé à contester l'exactitude de l'énoncé, que donne Laplace, du théorème sur la probabilité des événements composés. Quant à moi, je pense qu'il est impossible de rien ajouter à cet énoncé sans tomber dans la diffusion et sans courir le risque beaucoup plus grave d'en faire des applications erronées.

Dans le problème traité comme exemple par l'auteur de la Note en question, le nombre des cas favorables est bien $C_n^a \times C_a^b$, le nombre des cas possibles est bien aussi 3^n; mais comme tous ces cas ne sont pas également possibles, il n'est pas permis de prendre le rapport de ces deux nombres pour obtenir la probabilité cherchée.

Il est facile de voir qu'en ramenant tous les cas à une égale possibilité les nombres des cas favorables et des cas possibles deviennent respectivement

$$C_n^a \times C_a^b 2^{n-a}, \quad \text{et} \quad 2^n \times 2^n = 2^{2n}.$$

On peut alors prendre avec raison le rapport de ces deux nombres, et l'on a

$$P = \frac{C_n^a C_a^b 2^{n-a}}{2^{2n}} = \frac{C_n^a C_a^b}{2^{n+a}} = \frac{C_n^a}{2^n} \times \frac{C_a^b}{2^a},$$

ce qui est précisément la traduction de l'énoncé de Laplace.

Au reste, l'inexactitude de la formule $\frac{C_n^a C_a^b}{3^n}$ saute immédiatement aux yeux; prenons, en effet, les deux cas suivants :

$$a = b = 1, \quad \text{et} \quad a = b = n - 1.$$

D'après la formule précédente, ces deux cas auraient la même probabilité; or cela reviendrait à dire qu'il y aurait la même chance à tirer une boule désignée à l'avance d'une urne qui n'en contiendrait que 2, ou d'une urne qui en contiendrait 2^{n-1}, ce qui ne saurait être admis par personne.

Permettez-moi maintenant, Monsieur, de vous parler d'un autre sujet.

A la page 46 du *Bulletin bibliographique* pour l'année 1857, se trouve l'énoncé d'un théorème de Legendre, proposé pour prix en 1858 par l'Académie des Sciences.

Si je l'ai bien compris, cet énoncé est le suivant, mais il ne m'a pas paru très-clair.

Soient $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ les nombres premiers impairs successifs

$$\begin{array}{cccccccccc} 1, & 3, & 5, & 7, & 11, & 13, & 17, & 19, \ldots, & \ldots\ldots \\ P_1, & P_2, & P_3, & P_4, & P_5, & P_6, & P_7, & P_8, \ldots, & P_n, \ldots; \end{array}$$

soit aussi une progression arithmétique

$$A - C, \quad 2A - C, \quad 3A - C, \quad \ldots,$$

dans laquelle A et C sont premiers entre eux : démontrer que, si dans cette progression, à partir d'un rang quelconque, on prend P_n termes consécutifs

$$KA - C, \quad (K+1)A - C, \quad \ldots, \quad (K + P_n - 1)A - C,$$

il y aura toujours au moins un de ces P_n termes qui ne sera divisible par aucun de n nombres premiers pris au hasard dans la première suite.

Ce théorème m'intéressait particulièrement, parce qu'en le supposant exact j'en avais déduit très-simplement le *postulatum* de M. Bertrand, mais, après en avoir cherché pendant longtemps la démonstration, j'en ai reconnu l'inexactitude.

Prenons, en effet,

$$\left.\begin{aligned} A &= 49493 = 43 \times 1151 \\ C &= 1072 = 16 \times 67 \end{aligned}\right\} \text{nombres premiers entre eux}$$

$$K = 197,$$

$$n = 8, \quad \text{et par suite} \quad P_n = 19;$$

on peut s'assurer facilement que chacun des 19 termes de la progression arithmétique

$$197.49493 - 1072, \quad 198.49493 - 1072, \quad \ldots, \\ \ldots, \quad 215.49493 - 1072$$

est divisible au moins par l'un des 8 nombres premiers 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, résultat qui infirme le théorème en question.

Conformément au désir exprimé par M. Nievenglowski (même tome, p. 235 et 236), je m'empresse de faire savoir aux lecteurs des *Nouvelles Annales* que M. Nievenglowski, professeur au lycée de Clermont-Ferrand, a, effectivement, découvert une *faute à corriger* dans un Traité de Trigonométrie, à la rédaction duquel j'ai participé :

Page 106 de ce Traité, ligne 10 en remontant, au lieu de *aucune*, lisez *une*. G.