NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. BELLAVITIS

Exposition de la méthode des équipollences

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 297-315

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__297_1>

EXPOSITION DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES

(suite, voir même tome, p. 241);

PAR M. G. BELLAVITIS.

(Traduit de l'italien par M. LAISANT, capitaine du Génie.)

---

78. *Inscrire dans un cercle un polygone dont les côtés passent par des points donnés, ou soient de longueurs données.*

Il y a peu de problèmes de Géométrie élémentaire qui aient occupé les mathématiciens autant que celui consistant à inscrire dans un cercle un polygone dont les côtés passent par des points donnés. La solution suivante, publiée par moi en 1835, est peut-être plus simple que celles trouvées par les considérations synthétiques indirectes des anciens géomètres.

Soit qu'on veuille inscrire un quadrilatère XYZW (*fig.* 21), dont les trois côtés XY, YZ, ZW passent respectivement par les points donnés A, B, C, et dont le quatrième côté WX ait une longueur donnée. Soit OH le rayon d'inclinaison nulle. Posons

$$\mathrm{OX} \bumpeq \varepsilon^x\,\mathrm{OH},$$
$$\mathrm{OY} \bumpeq \varepsilon^y\,\mathrm{OH},$$
$$\mathrm{OZ} \bumpeq \varepsilon^z\,\mathrm{OH},$$
$$\mathrm{OW} \bumpeq \varepsilon^u\,\mathrm{OH}.$$

La condition que XAY soit une ligne droite s'exprime (44) par

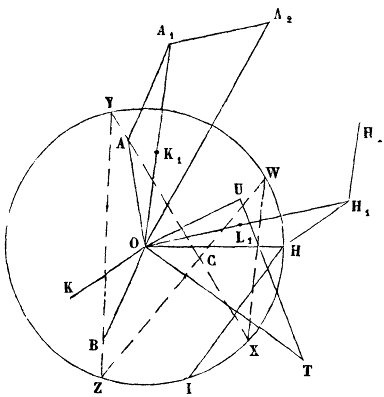
$$\varepsilon^x\,\mathrm{OH} - \mathrm{OA} \bumpeq n(\varepsilon^y\,\mathrm{OH} - \mathrm{OA}).$$

Entre cette équipollence et sa conjuguée, nous éliminerons n et nous aurons

$$(\varepsilon^{x}\mathrm{OH}-\mathrm{OA})(\varepsilon^{-y}\mathrm{OH}-\mathrm{cj.OA}),$$
$$\bumpeq(\varepsilon^{-x}\mathrm{OH}-\mathrm{cj.OA})(\varepsilon^{y}\mathrm{OH}-\mathrm{OA}).$$

Cette équipollence devient identique (et il était facile de le prévoir) lorsque $y=x$; elle est donc divisible par

Fig. 21.



$\varepsilon^{x}-\varepsilon^{y}$, et donne par suite la relation suivante entre x et y:

(1) $$\varepsilon^{x}\bumpeq(\mathrm{OA}-\varepsilon^{y}\mathrm{OH}):(\mathrm{OH}-\varepsilon^{y}\mathrm{cj.OA}).$$

De même, les conditions que les côtés YZ, ZW passent par les points B et C fournissent les relations

(2) $$\varepsilon^{y}\bumpeq(\mathrm{OB}-\varepsilon^{z}\mathrm{OH}):(\mathrm{OH}-\varepsilon^{z}\mathrm{cj.OB}),$$
(3) $$\varepsilon^{z}\bumpeq(\mathrm{OC}-\varepsilon^{u}\mathrm{OH}):(\mathrm{OH}-\varepsilon^{u}\mathrm{cj.OC}).$$

Enfin, en appelant δ l'arc donné WX, on aura

(4) $$\varepsilon^{u}\bumpeq\varepsilon^{x-\delta}.$$

Par des substitutions successives effectuées dans les précédentes équipollences, nous obtiendrons une équipollence trinôme, qui nous permettra de déterminer l'inclinaison inconnue x, c'est-à-dire la position du point X.

Pour montrer comment il y aurait lieu d'opérer, quel que fût le nombre des côtés du polygone, nous formerons successivement les coefficients des équipollences résultant des substitutions indiquées. En substituant la valeur (2) dans (1), nous aurons

$$\begin{aligned} \varepsilon^x \bumpeq (&\mathrm{OA.OH} - \varepsilon^z \mathrm{OA\,cj.OB} - \mathrm{OB.OH} + \varepsilon^z \mathrm{OH.OH}) : \\ &(\mathrm{OH.OH} - \varepsilon^z \mathrm{OH\,cj.OB} - \mathrm{cj.OA.OB} + \varepsilon^z \mathrm{cj.OA.OH}) \\ \bumpeq\, &(\mathrm{OA}_1 + \varepsilon^z \mathrm{OH}_1) : (\mathrm{cj.OH}_1 + \varepsilon^z \mathrm{cj.OA}_1), \end{aligned}$$

pourvu que

$$\mathrm{OA}_1 \bumpeq \mathrm{OA} - \mathrm{OB},$$

$$\mathrm{OH}_1 \bumpeq \mathrm{OH} - \mathrm{OA\,cj.OB} : \mathrm{OH}.$$

De même

$$\varepsilon^x \bumpeq (\mathrm{OA}_2 - \varepsilon^u \mathrm{OH}_2) : (\mathrm{cj.OH}_2 - \varepsilon^u \mathrm{cj.OA}_2),$$

pourvu que

$$\mathrm{OA}_2 \bumpeq \mathrm{OA}_1 + \mathrm{OH}_1 . \mathrm{OC} : \mathrm{OH}$$

et

$$\mathrm{OH}_2 \bumpeq \mathrm{OH}_1 + \mathrm{OA}_1\,\mathrm{cj.OC} : \mathrm{OH}.$$

On continuerait ainsi de la même manière. Dans le cas que nous considérons, l'équipollence (4) nous donnera

$$\varepsilon^{2x-\delta} \mathrm{cj.OA}_2 - \varepsilon^x \mathrm{cj.OH}_2 + \varepsilon^{x-\delta} \mathrm{OH}_2 + \mathrm{OA}_2 \bumpeq \mathrm{o},$$

ou, en multipliant par $\varepsilon^{\delta-x}\mathrm{OH} : \mathrm{cj.OA}_2$,

$$\begin{aligned} &\varepsilon^x \mathrm{OH} + \varepsilon^{\delta-x} \mathrm{OH.OA}_2 : \mathrm{cj.OA}_2 \\ &\qquad \bumpeq \mathrm{OH}(\mathrm{OH}_2 + \varepsilon^\delta\, \mathrm{cj.OH}_2) : \mathrm{cj.OA}_2 \bumpeq \mathrm{OU}, \end{aligned}$$

laquelle équipollence, comparée comme d'habitude (68) avec

$$\mathrm{OX} + \mathrm{XU} \bumpeq \mathrm{OU},$$

nous montre que le point X s'obtiendra en coupant le cercle donné par une autre circonférence égale, de centre U.

Les équipollences précédentes nous montrent clairement comment on trouve les points A_1, H_1,.... On mène AA_1 équipollente à BO; on construit le triangle OAK symétriquement semblable à OHB, et l'on mène $HH_1 \triangleq KO$; on forme OH_1L_1 directement semblable à OHC, et OA_1K_1 inversement semblable au même triangle OHC; enfin l'on tire $A_1A_2 \triangleq OL_1$, $H_1H_2 \triangleq OK_1$. La corde HI étant égale au côté WX du quadrilatère cherché, on mène OT perpendiculaire à cette corde HI, et ayant par suite pour inclinaison $\frac{1}{2}\delta$, et on la coupe de manière que H_2T soit égal à OH_2. On aura

$$OT \triangleq OH_2 + \varepsilon^{\delta}\,\mathrm{cj}.OH_2.$$

Enfin, construisant OTU inversement semblable à OA_2H, la droite qui divisera perpendiculairement OU en deux parties égales coupera la circonférence donnée au sommet X du quadrilatère demandé XAYBZCW.

Dans notre figure, la direction arbitraire OH a été prise suivant OC, de sorte que les triangles OHC, OH_1L_1, OA_1K_1 se sont trouvés réduits à trois droites divisées proportionnellement.

79. Notre solution présente l'avantage d'indiquer les calculs par lesquels on peut déterminer numériquement la position du sommet X.

Les deux solutions se réduisent à une seule lorsque OU est double du rayon du cercle, c'est-à-dire lorsque la direction de OT est telle que la projection de OH_2 sur cette droite soit égale à OA_2. Dans ce cas, le côté ZW est le plus grand de tous ceux des quadrilatères inscrits dans le cercle, et dont trois côtés passent par les points A, B, C.

80. Dans le n° 78, nous avons eu occasion d'exprimer la condition que trois points sont en ligne droite, par une équipollence ne contenant pas les coefficients arbitraires employés dans ce but au n° 44, et nous sommes parvenu à la formule désirée, au moyen de l'élimination, et par voie tout à fait directe. Ce n'est pas un des moindres avantages de la méthode des équipollences que de ne pas obliger de recourir à des formules précédemment démontrées, et de pouvoir présenter tous les résultats comme des conséquences faciles des principes fondamentaux.

Il ne sera pas inutile de fixer un instant l'attention sur les *fonctions alternées* ou *déterminants*, qui servent à établir la condition dont on s'occupe. Au n° 44, nous avons vu que, si

$$p\,\mathrm{OA} + q\,\mathrm{OB} + r\,\mathrm{OC} \bumpeq 0,$$

il faut, pour que les points A, B, C soient en ligne droite, que les trois coefficients numériques satisfassent à la relation

$$p + q + r \bumpeq 0.$$

Ajoutant à cette équipollence la conjuguée de la première

$$p\,\mathrm{cj.OA} + \ldots \bumpeq 0,$$

et remarquant qu'elles doivent exister simultanément, la théorie de l'élimination nous fait voir que : *la condition que* A, B, C *soient en ligne droite s'exprime en écrivant que la fonction alternée*

$$\begin{aligned}&\mathrm{OB\,cj.OC} - \mathrm{OC\,cj.OB}\\ &\quad + \mathrm{OC\,cj.OA} - \mathrm{OA\,cj.OC} + \mathrm{OA\,cj.OB} - \mathrm{OB\,cj.OA}\end{aligned}$$

est équipollente à zéro.

81. Cherchons maintenant *la condition nécessaire pour que les perpendiculaires aux extrémités des droites* OA′, OB′, OC′ *se rencontrent en un même point* M.

Nous avons (48)

$$\mathrm{OM} \triangleq \mathrm{OA}' + \mathrm{A}'\mathrm{M} \triangleq (1 + l\sqrt{})\mathrm{OA}' \triangleq (1 + m\sqrt{})\mathrm{OB}' \triangleq (1 + n\sqrt{})\mathrm{OC}'.$$

Entre ces équipollences et leurs conjuguées on élimine l, m, n, et l'on trouve que *la condition cherchée est exprimée ainsi, au moyen de la fonction alternée suivante :*

$$\begin{aligned} &\mathrm{OA}'\,\mathrm{cj.OA}'(\mathrm{OB}'\,\mathrm{cj.OC}' - \mathrm{OC}'\,\mathrm{cj.OB}') \\ &+ \mathrm{OB}'\,\mathrm{cj.OB}'(\mathrm{OC}'\,\mathrm{cj.OA}' - \mathrm{OA}'\,\mathrm{cj.OC}') \\ &+ \mathrm{OC}'\,\mathrm{cj.OC}'(\mathrm{OA}'\,\mathrm{cj.OB}' - \mathrm{OB}'\,\mathrm{cj.OA}') \triangleq 0. \end{aligned}$$

La théorie de l'élimination nous montre que, par suite, nous pouvons avoir en même temps les trois équipollences

$$\begin{aligned} p'\,\mathrm{OA}' + q'\,\mathrm{OB}' + r'\,\mathrm{OC}' &\triangleq 0, \\ v'\,\mathrm{cj.OA} + \ldots &\triangleq 0, \\ p'\,\mathrm{gr}^2\mathrm{OA}' + q'\,\mathrm{gr}^2\mathrm{OB}' + r'\,\mathrm{gr}^2\mathrm{OC}' &\triangleq 0. \end{aligned}$$

Dans la dernière (qui est aussi une équation), on a écrit $\mathrm{gr}^2\mathrm{OA}'$ (52) au lieu de $\mathrm{OA}'\mathrm{cj.OA}'$, etc.

De là, on pourrait tirer comme conséquence un théorème connu de Mécanique; sans insiter là-dessus, nous remarquerons que la fonction alternée de ce paragraphe se déduit de celle du paragraphe précédent, en supposant

$$\mathrm{OA}' \triangleq 1 : \mathrm{cj.OA}, \ldots.$$

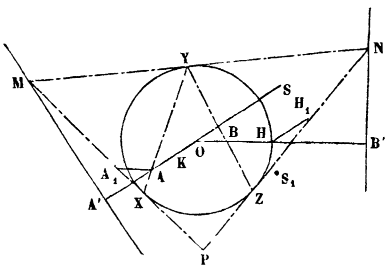
Il en résulte que, A, B, C étant en ligne droite, si par un point quelconque O on mène OA, OB, OC, et qu'on prenne sur ces droites les longueurs OA',... inversement proportionnelles à OA, ..., les trois perpendiculaires élevées en A', B', C' se rencontreront en un même point, et réciproquement. C'est un des théorèmes fondamentaux de la *réciprocité*, en *transformation polaire* des figures.

82. Problème. — *Circonscrire à un cercle un poly-*

gone dont les angles aient leurs sommets situés sur des droites données ou soient de grandeurs données.

Les droites seront convenablement définies par les perpendiculaires OA′, OB′,... (*fig.* 22) abaissées sur elles

Fig. 22.



par le centre O du cercle donné, et les points de contact du triangle circonscrit se trouvent exprimés par

$$\mathrm{OX} \bumpeq \varepsilon^x \mathrm{OH}, \quad \mathrm{OY} \bumpeq \varepsilon^y \mathrm{OH}, \ldots,$$

OH étant le rayon pris pour origine des inclinaisons. La condition pour que les trois perpendiculaires élevées aux extrémités de OA′, OX, OY se rencontrent en un même point M a été donnée plus haut : c'est

$$\begin{aligned}&\mathrm{OA}'\,\mathrm{cj.OA}'\,(\varepsilon^{x-y} - \varepsilon^{y-x})\\ &\quad + \mathrm{OH}(\varepsilon^y\,\mathrm{cj.OA}' - \varepsilon^{-y}\mathrm{OA}' + \varepsilon^{-x}\mathrm{OA}' - \varepsilon^x\,\mathrm{cj.OA}') \bumpeq 0.\end{aligned}$$

Cette équipollence devient identique (et il était facile de le prévoir), lorsque $x = y$; divisée par $\varepsilon^x - \varepsilon^y$, puis résolue par rapport à ε^x, elle donne

$$\varepsilon^x \bumpeq (\mathrm{OH.OA}' - \varepsilon^y \mathrm{OA}'\,\mathrm{cj.OA}') : (\mathrm{OA}'\,\mathrm{cj.OA}' - \varepsilon^y \mathrm{OH}\,\mathrm{cj.OA}'),$$

équipollence qui devient identique à celle (1) du n° 78, lorsqu'on pose

$$OA \bumpeq (OH)^2 : cj.OA',$$

si bien que la condition imposée aux tangentes en X, Y, de se rencontrer en un point de la droite A'M, est identique avec celle obligeant la corde XY à passer par le point A, située sur OA' de telle sorte que OA.OA' égale le carré du rayon (ce qui est très-connu dans la théorie des polaires). Déterminant de la même manière le point B de OB',..., nous réduirons le problème aux formules plus commodes du n° 78.

83. Si, par exemple, le triangle MNP, circonscrit au cercle, doit avoir deux sommets sur les droites A'M, B'N, et l'angle P maximum, nous déterminerons comme plus haut les deux points A, B; puis, menant le rayon OBH, nous diviserons OA en K, de la même manière que le rayon OH est coupé en B. Après cela, nous mènerons $AA_1 \bumpeq BO$, $HH_1 \bumpeq KO$; et, donnant à OS une direction telle que la projection de OH_1 sur cette droite soit égale à OA_1, nous formerons l'angle SOX égal à HOA_1. Il y a deux solutions maxima, répondant aux deux positions OS et OS_1 que peut prendre OS.

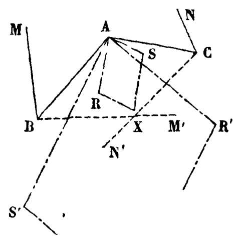
84. Problème. — *On donne trois points* A, B, C : *trouver la base commune des trois triangles* AXY, BXY, CXY, *connaissant les différences de leurs angles au sommet* A, B, C, *ainsi que les rapports entre les rapports de leurs côtés* AX:AY, BX:BY, CX:CY.

Ce problème s'est présenté à Lagrange dans quelques-unes de ses considérations sur les cartes géographiques.

Par les équipollences, la solution en est tout à fait directe et facile (*).

Les conditions du problème (*fig.* 23) sont exprimées

Fig. 23.



par les deux équipollences

$$\mathrm{AX}.\mathrm{BY}:\mathrm{AY}.\mathrm{BX} \mathrel{\underline{\frown}} \mathrm{CN}:\mathrm{CA},$$
$$\mathrm{AX}.\mathrm{CY}:\mathrm{AY}.\mathrm{CX} \mathrel{\underline{\frown}} \mathrm{BM}:\mathrm{BA},$$

pourvu que CN ait une inclinaison et une grandeur telles que

$$\text{angle ACN} = \text{angle YAX} - \text{angle YBX},$$

et que le rapport CN : CA soit égal au quotient donné de AX : AY divisé par BX : BY. On en peut dire autant pour BM. Par la règle I, toutes les droites inconnues se réduisent aux deux AX, AY; il est ensuite facile d'éli-

(*) Voici comment s'exprime Lagrange au sujet de ce problème :

« Or ce problème me paraît assez difficile à résoudre par la Géométrie; et quant à la solution algébrique, je ne l'ai pas tentée, soit pour ne pas trop m'écarter de mon sujet, soit aussi parce qu'il me semble qu'elle ne serait d'aucun usage, à moins qu'on ne pût la ramener ensuite à une construction aisée.

» Par le moyen de ce problème, on pourra donc construire une carte géographique dans laquelle trois lieux quelconques seront placés à volonté; ce qui peut être utile dans quelques occasions. »

(Lagrange, *Mém. de l'Académie de Berlin pour* 1779, p. 201, § 34.)

miner cette dernière, et d'obtenir la formule de solution

$$AX \triangleq (AC.MB + AB.CN) : MN \triangleq AR + AS,$$

si l'on a

$$AR \triangleq AC.MB : MN,$$
$$AS \triangleq AB.NC : NM,$$

c'est-à-dire que, si l'on construit les triangles ACR, ABS, qui, respectivement, soient directement semblables à MNB, NMC, on aura

$$SX \triangleq AR.$$

On pourra pareillement déterminer Y ; dans l'expression fournissant ce point, il conviendra de substituer aux rapports CN : CA, BM : BA leurs équipollents CA : CN′, BA : BM′, afin qu'on puisse éliminer X avec la même facilité qu'on a précédemment éliminé Y. On trouvera ainsi

$$AY \triangleq AR' + AS',$$

AR′ et AS′ étant respectivement

$$AR' \triangleq AC.M'B : M'N',$$
$$AS' \triangleq AB.N'C : N'M',$$

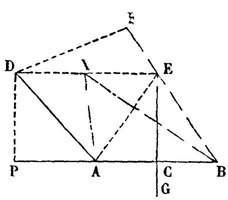
ce qui donne

$$AR.AR' \triangleq AS.AS'.$$

85. Problème. — *Construire un triangle, connaissant la base, le produit ou le rapport des deux autres côtés, et la somme ou la différence des deux angles à la base.*

Désignant par X le sommet inconnu du triangle ABX, et se rappelant que cj.AX a une grandeur égale à celle de AX, et une inclinaison égale, mais de signe contraire (45), on verra que les deux conditions, dans chacun des cas du problème, sont comprises dans une seule équipollence, dont le membre inconnu est dans les quatre cas AX cj.BX, AX.BX, AX : BX, AX : cj.BX. Les deux derniers cas ont déjà été résolus aux n^{os} 40 et 47. Le second cas ne présente aucune difficulté, puisque l'équipollence se résout de la même manière qu'une équation du second

Fig. 24.



degré; nous aurons occasion d'effectuer cette résolution au n° 125.

Le premier cas va nous fournir l'occasion de faire une observation fort importante. En posant (*fig.* 24)

$$\mathrm{AX\,cj.BX} \bumpeq \mathrm{AD\,cj.BA},$$

AD.AB sera le produit donné des deux côtés, et

$$\mathrm{angle\,XAD} = \mathrm{angle\,XBA},$$

c'est-à-dire que BAD est la somme des deux angles à la base. L'équipollence qui exprime les conditions du problème contient AX, et

$$\mathrm{cj.BX} \bumpeq \mathrm{cj.AX} - \mathrm{cj.AB}.$$

Il faudra, par suite, la combiner avec sa conjuguée

$$\mathrm{cj.AX(AX - AB) + AB\,cj.AD} \bumpeq 0.$$

Prenant AB pour origine des inclinaisons, la première équipollence devient

$$\mathrm{AX\,(cj.AX - AB) + AB.AD} \bumpeq 0.$$

Les retranchant l'une de l'autre, on a

$$AX - \mathrm{cj}.AX \bumpeq AD - \mathrm{cj}.AD,$$

ou (10)

$$DX \bumpeq \mathrm{cj}.DX.$$

Par suite DX est parallèle à AB, ce que l'on pouvait facilement déduire de considérations géométriques.

Éliminant cj.AX, on obtient

$$(AX)^2 - (AB + AD - \mathrm{cj}.AD)\,AX + AB.AD \bumpeq 0,$$

formule de résolution qui se simplifiera en posant

$$AB \bumpeq 2AC, \quad AD - \mathrm{cj}.AD \bumpeq 2CE,$$

c'est-à-dire (56) en menant CE perpendiculaire sur le milieu de AB, et DE parallèle à AB; et enfin en construisant

$$AF \bumpeq AB.AD : AE,$$

c'est-à-dire le triangle ADF directement semblable au triangle isoscèle AEB.

D'après cela, par un calcul facile (10, 18), on trouvera

$$EX \bumpeq \sqrt{EA.EF},$$

ce qui nous montre que la droite EX doit être moyenne proportionnelle entre AE, EF, et également inclinée sur ces deux droites.

86. On obtient une solution encore plus simple par la transformation très-facile qui suit, dans laquelle P est le pied de la perpendiculaire abaissée du point D sur la droite AB d'inclinaison nulle, en sorte que

$$CE \bumpeq PD, \quad 2PD \bumpeq AD - \mathrm{cj}.AD \ (56).$$

L'équipollence du second degré en AX donne

$$\begin{aligned}(EX)^2 &\,\underline{\Omega}\, (AC + PD)^2 - AB\,(AP + PD)\\ &\,\underline{\Omega}\, (AC - AP)^2 - (AP)^2 + (PD)^2\\ &\,\underline{\Omega}\, (CP)^2 - (AP + PD)\,(AP - PD)\\ &\,\underline{\Omega}\, (CP)^2 - AD\,\text{cj}.AD.\end{aligned}$$

Observant que les deux derniers termes ont une inclinaison nulle, nous verrons que cette équipollence est identique à l'équation

$$gr^2 EX = gr^2 CP - gr^2 AD.$$

Par suite, d'après le théorème de Pythagore, sur EC nous prendrons EG = AD, puis nous couperons ED en X par un arc de centre G et d'un rayon égal à CP.

87. Lorsque le problème est impossible, la construction précédente met en évidence cette impossibilité; il n'en est pas ainsi pour celle du n° 85, puisque, si F tombe entre E et B, le point X sera réel et se trouvera sur EC.

Dans le calcul des équipollences, il peut donc arriver (ce qui se présente fort souvent aussi en Algèbre) qu'en combinant une équipollence avec sa conjuguée on obtienne une solution qui ne satisfasse pas à la première. Ceci est rendu évident pour le cas dont nous nous occupons, par ce fait que la condition DX $\underline{\Omega}$ cj.DX n'est plus satisfaite.

88. Problème. — *On donne trois circonférences ayant un point commun* I (*fig.* 25). *Mener par ce point la droite* IXZY, *telle que les segments* XZ, XY *de cette droite, compris entre les circonférences, aient entre eux le rapport donné m.*

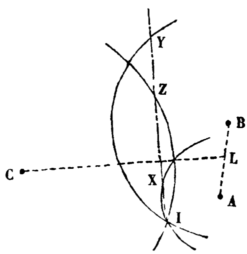
Désignant par ε^u l'inclinaison de la droite cherchée, la corde $IZ \bumpeq z\varepsilon^u$ du cercle C sera donnée par

$$z\varepsilon^u - IC \bumpeq ZC \bumpeq \varepsilon^t IC,$$

en posant

$$t = \text{inc.}\,CZ - \text{inc.}\,IT.$$

Fig. 25.



Multipliant la précédente équipollence par sa conjuguée

$$z\varepsilon^{-u} - \text{cj.}\,IC \bumpeq \varepsilon^{-t}\,\text{cj.}\,IC,$$

on obtient

$$z\varepsilon^u \bumpeq \varepsilon^{2u}\,\text{cj.}\,IC + IC.$$

Cette expression de IZ, et les deux analogues de IX, IY, substituées dans l'équipollence

$$XZ - mXY \bumpeq 0,$$

donnent

$$\varepsilon^{2u}(\text{cj.}\,AC - m\,\text{cj.}\,AB) + AC - mAB \bumpeq 0.$$

Construisant

$$AL \bumpeq mAB, \quad AC - mAB \bumpeq LC,$$

on a

$$\varepsilon^{2u}\,\text{cj.}\,LC \bumpeq -LC,$$

équipollence qui donne

$$2u - \text{inc.}\,LC = \text{inc.}\,LC - 180^\circ,$$

ou

$$u = \text{inc.LC} - 90^\circ.$$

Donc la droite cherchée est perpendiculaire à la droite LC, déterminée plus haut.

89. Une solution aussi rapide étant trouvée, il est facile ensuite de la démontrer au moyen de considérations géométriques, et même de l'étendre au problème analogue relatif à quatre sphères ayant un point commun I.

Le problème concernant les trois circonférences a été résolu beaucoup plus péniblement par Fergola (*Acad. de Naples*, 1788, p. 136); il en déduit la solution de cet autre problème, proposé par Newton (*Princ. math.*, lemme 27) : « Inscrire entre quatre droites données un quadrilatère semblable à un quadrilatère donné. » J'ai résolu ce dernier au n° 48 de mon Mémoire de 1843. Le premier problème fut proposé ensuite par Steiner et résolu par Clausen (*Journal de Crelle*, t. II, 1827, p. 96; et t. VI, 1830, p. 404).

ADDITIONS DU TRADUCTEUR AU N° 89.

I. *Solution géométrique du problème précédent.* — Soit IXYZ la droite cherchee, A, B, C les trois centres, $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ trois perpendiculaires sur IXYZ. On aura

$$IX = 2I\alpha, \quad IY = 2I\beta, \quad IZ = 2I\gamma,$$

et, par suite,

$$XY = 2\alpha\beta, \quad XZ = 2\alpha\gamma;$$

mais, en appelant L la rencontre de AB et de $C\gamma$, on a

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma} = \frac{AB}{AL} \quad \text{ou} \quad \frac{XY}{XZ} = \frac{AB}{AL}.$$

On voit donc qu'il suffit de diviser AB en L comme XY doit être divise en Z pour obtenir une droite CL perpendiculaire à la droite cherchee.

Le problème peut présenter des cas particuliers sur lesquels nous n'insistons pas, et qu'il est facile de discuter.

Extension du même problème à quatre sphères ayant un point commun I. — Soient IXYZV la droite cherchee, A, B, C, D les quatre centres, $A\alpha$

$B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ des perpendiculaires sur IXYZV. On aura, comme plus haut,

$$XY = 2\alpha\beta,\quad XZ = 2\alpha\gamma,\quad XV = 2\alpha\delta.$$

Appelons C′ et D′ les rencontres de AB avec deux plans perpendiculaires à IXYZV menés respectivement par C et D. Nous aurons

$$\frac{\alpha\beta}{AB} = \frac{\alpha\gamma}{AC'} = \frac{\alpha\delta}{AD'},$$

c'est-à-dire

$$\frac{XY}{AB} = \frac{XZ}{AC'} = \frac{XV}{AD'}.$$

Donc, en divisant AB en C′ et D′, comme XY doit être divisé en Z et V, nous obtiendrons les droites CC′ et DD′, à chacune desquelles la droite cherchée doit être perpendiculaire. On n'aura donc qu'à mener par le point I une parallèle à la plus courte distance de CC′ et DD′.

Nous laissons encore ici au lecteur le soin d'examiner les cas particuliers.

On peut remarquer combien ces solutions sont simples et faciles, au moins en apparence. Mais il ne faudrait pas croire qu'il fût aisé de les découvrir *a priori*, par les seules considérations géométriques ordinaires. La méthode des équipollences nous conduit au contraire à ces résultats d'une façon tout à fait naturelle. Il est intéressant de voir combien cette Géométrie analytique nouvelle apporte un puissant concours à la Géométrie synthétique elle-même, en lui fournissant des solutions simples, auxquelles l'analogie permet de donner souvent une plus grande extension. C'est ce qui se présente ici pour le problème des trois cercles et celui des quatre sphères; et c'est pourquoi nous avons tenu à en indiquer les solutions géométriques, qui montrent bien tout ce qu'on peut demander à la méthode si féconde des équipollences.

II. PROBLÈME. — *Inscrire entre quatre droites données un quadrilatère semblable à un quadrilatère donné.*

Soient AB, BC, CD, DA (*fig.* 25 *bis*) les quatre droites données, et LMNP le quadrilatère donné; le sommet homologue de L devant se trouver sur AB, l'homologue de M sur BC, et ainsi de suite.

Appelons XYZV le quadrilatère cherché. On exprimera qu'il est semblable (directement) à LMNP, au moyen de la double équipollence

$$\frac{XY}{LM} \triangleq \frac{YZ}{MN} \triangleq \frac{ZV}{NP}.$$

De plus, X étant situé sur AB, on aura

$$AX \triangleq x\,AB,$$

et de même

$$BY \triangleq y\,BC,$$
$$CZ \triangleq z\,CD,$$
$$DV \triangleq v\,DA.$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathrm{XY} &\triangleq \mathrm{BY} - \mathrm{AX} + \mathrm{AB} \triangleq y\,\mathrm{BC} - x\,\mathrm{AB} + \mathrm{AB},\\
\mathrm{YZ} &\triangleq \mathrm{CZ} - \mathrm{BY} + \mathrm{BC} \triangleq z\,\mathrm{CD} - y\,\mathrm{BC} + \mathrm{BC},\\
\mathrm{ZV} &\triangleq \mathrm{DV} - \mathrm{CZ} + \mathrm{CD} \triangleq v\,\mathrm{DA} - z\,\mathrm{CD} + \mathrm{CD}.
\end{aligned}$$

Les équipollences exprimant la similitude deviendront donc

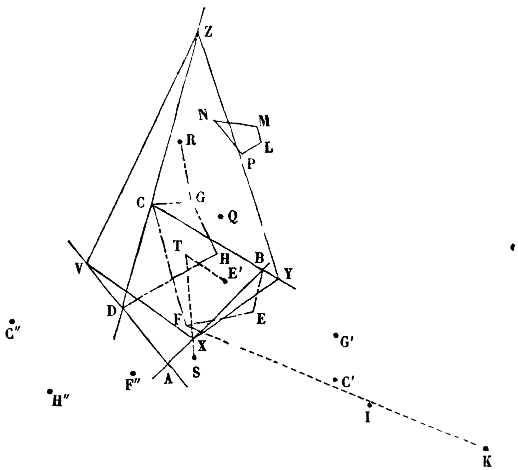
$$\frac{y\,\mathrm{BC} - x\,\mathrm{AB} + \mathrm{AB}}{\mathrm{LM}} \triangleq \frac{z\,\mathrm{CD} - y\,\mathrm{BC} + \mathrm{BC}}{\mathrm{MN}} \triangleq \frac{v\,\mathrm{DA} - z\,\mathrm{CD} + \mathrm{CD}}{\mathrm{NP}},$$

ou, en les décomposant en deux et chassant les dénominateurs LM, NP,

$$\begin{aligned}
&- x\,\mathrm{AB} + y\,\mathrm{BC}\left(1 + \frac{\mathrm{LM}}{\mathrm{MN}}\right) - z\,\mathrm{CD}\,\frac{\mathrm{LM}}{\mathrm{MN}} \triangleq \mathrm{BC}\,\frac{\mathrm{LM}}{\mathrm{MN}} - \mathrm{AB},\\
&- y\,\mathrm{BC}\,\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{MN}} + z\,\mathrm{CD}\left(\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{MN}} + 1\right) + v\,\mathrm{AD} \triangleq \mathrm{CD} - \mathrm{BC}\,\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{MN}}.
\end{aligned}$$

Mais, si nous construisons sur BC, pris pour homologue de MN, le quadrilatère EBCF directement semblable à LMNP, puis si nous faisons

Fig. 25 *bis*.



de même sur le côté CD, pris pour homologue de MN, le quadrilatère GCDH directement semblable à LMNP, nous aurons

$$\mathrm{BC}\,\frac{\mathrm{LM}}{\mathrm{MN}} \triangleq \mathrm{EB}, \quad \mathrm{CD}\,\frac{\mathrm{LM}}{\mathrm{MN}} \triangleq \mathrm{GC},$$

$$\mathrm{BC}\,\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{MN}} \triangleq \mathrm{CF}, \quad \mathrm{CD}\,\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{MN}} \triangleq \mathrm{DH}.$$

Nos équipollences deviendront, par suite,

$$(1)\qquad -x\mathrm{AB}+y\mathrm{EC}-z\mathrm{GC} \triangleq \mathrm{EA},$$

$$(2)\qquad -y\mathrm{CF}+z\mathrm{CH}+v\mathrm{AD} \triangleq \mathrm{FD}.$$

Pour les faire servir à la détermination des coefficients inconnus, nous les combinerons avec leurs conjuguées

$$(3)\qquad -x\,\mathrm{cj.AB}+y\,\mathrm{cj.EC}-z\,\mathrm{cj.GC} \triangleq \mathrm{cj.EA},$$

$$(4)\qquad -y\,\mathrm{cj.CF}+z\,\mathrm{cj.CH}+v\,\mathrm{cj.AD} \triangleq \mathrm{cj.FD}.$$

L'élimination de x entre (1) et (3), d'une part, et celle de v entre (2) et (4), de l'autre, donne lieu aux équipollences

$$\mathrm{EA}+y\mathrm{CE}+z\mathrm{GC} \triangleq \mathrm{cj.EA}\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{cj.AB}}+y\,\mathrm{cj.CE}\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{cj.AB}}+z\,\mathrm{cj.GC}\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{cj.AB}},$$

$$\mathrm{FD}+y\mathrm{CF}+z\mathrm{HC} \triangleq \mathrm{cj.FD}\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{cj.AD}}+y\,\mathrm{cj.CF}\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{cj.AD}}+z\,\mathrm{cj.HC}\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{cj.AD}}.$$

Si nous construisons les points C', E', G', symétriques de C, E, G par rapport à AB, et C'', F'', H'', symétriques de C, F, H par rapport à AD, les deux équipollences deviendront

$$\mathrm{EA}+y\mathrm{CE}+z\mathrm{GC} \triangleq \mathrm{E'A}+y\mathrm{C'E'}+z\mathrm{G'C'},$$

$$\mathrm{FD}+y\mathrm{CF}+z\mathrm{HC} \triangleq \mathrm{F''D}+y\mathrm{C''F''}+z\mathrm{H''C''}.$$

En les retranchant l'une de l'autre, on obtient

$$y(\mathrm{FE}+\mathrm{E'C'}+\mathrm{C''F''})+z(\mathrm{GH}+\mathrm{C'G'}+\mathrm{H''C''}) \triangleq \mathrm{E'E}+\mathrm{FF''}.$$

Construisons successivement

$$\mathrm{EI} \triangleq \mathrm{E'C'},\quad \mathrm{IK} \triangleq \mathrm{C''F''},$$

$$\mathrm{HQ} \triangleq \mathrm{C'G'},\quad \mathrm{QR} \triangleq \mathrm{H''C''},$$

$$\mathrm{ES} \triangleq \mathrm{FF''},$$

et il viendra

$$y\mathrm{FK}+z\mathrm{GR} \triangleq \mathrm{E'S}.$$

En menant E'T parallèle à FK, ST parallèle à RG, on aura le triangle E'TS, qui nous donnera

$$\mathrm{E'T}+\mathrm{TS} \triangleq \mathrm{E'S},$$

et par comparaison

$$\mathrm{E'T} \triangleq y\mathrm{FK},\quad \mathrm{TS} \triangleq z\mathrm{GR},$$

d'où

$$y \triangleq \frac{\mathrm{E'T}}{\mathrm{FK}},\quad z \triangleq \frac{\mathrm{TS}}{\mathrm{GR}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{BY}}{\mathrm{BC}} \triangleq \frac{\mathrm{E'T}}{\mathrm{FK}},\quad \frac{\mathrm{CZ}}{\mathrm{CD}} \triangleq \frac{\mathrm{TS}}{\mathrm{GR}}.$$

Les points Y et Z se détermineront donc aisément par le partage de chacun des côtés BC, CD dans un rapport donné (en prenant soin de remarquer les signes). Il n'y aura plus ensuite qu'à construire sur ce côté YZ un quadrilatère semblable à LMNP, YZ étant homologue de MN, et les deux autres sommets X, V tomberont forcément sur les droites données.

Si l'on voulait construire un quadrilatère *symétriquement semblable* à LMNP et satisfaisant aux conditions demandées, on commencerait par tracer L'M'N'P' symétrique de LMNP, et l'on opérerait sur L'M'N'P, comme on l'a fait sur LMNP.

La construction ci-dessus fera ressortir les circonstances particulières qui peuvent se présenter parfois. C'est ainsi qu'on verra que ce problème : *Inscrire un carré dans un carré,* est indéterminé, et conduit seulement à la relation $y = z$.

(*A suivre.*)