NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ABEL TRANSON

Sur une propriété des asymptotes et sur cette locution : « Les points situés à l'infini sur un plan sont en ligne droite »

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 289-297

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__289_0>

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES ASYMPTOTES ET SUR CETTE LOCUTION :

« Les points situés à l'infini sur un plan sont en ligne droite »;

PAR M. ABEL TRANSON.

L'asymptote d'une branche infinie de courbe est la limite des positions occupées par une tangente dont le point de contact s'éloigne indéfiniment sur cette branche.

Je démontrerai d'abord cette propriété en la déduisant de l'équation de la tangente; j'en donnerai ensuite, au moyen de la *méthode des homogènes*, une autre démonstration, qui me procurera l'occasion d'attribuer à cette méthode une signification différente de la signification généralement admise, et surtout l'occasion d'apprécier la locution usuelle ci-dessus rappelée.

I.

L'équation d'une courbe de degré m étant

$$f(x,y) + \varphi(x,y) + \psi(x,y) + \ldots = 0,$$

où f, φ, ψ, ... sont des fonctions homogènes des degrés m, $m-1$, $m-2$, ..., et l'équation d'une asymptote étant

$$y = cx + d,$$

on sait : 1° que c est la limite vers laquelle tend $\frac{y}{x}$ pour $x=\infty$ lorsqu'on s'éloigne sur la branche de courbe correspondante, et est déterminé par l'équation

$$f(1, c) = 0;$$

2° que d est, par rapport à la même branche et aussi pour $x = \infty$, la limite de $y - cx$, et que sa valeur est

$$d = -\frac{\varphi(1, c)}{f'_c(1, c)}.$$

Cela posé, l'équation de la tangente en un point quelconque (x', y') est la suivante :

$$y - y' = -\frac{\frac{df}{dx'}(x', y') + \frac{d\varphi}{dx'}(x', y') + \ldots}{\frac{df}{dy'}(x', y') + \frac{d\varphi}{dy'}(x', y') + \ldots}(x - x').$$

Le coefficient angulaire c' est déterminé par l'équation

$$c'\left[\frac{df}{dy'}(x', y') + \frac{d\varphi}{dy'}(x', y') + \ldots\right] + \frac{df}{dx'}(x', y') + \frac{d\varphi}{dx'}(x', y') + \ldots = 0,$$

où les fonctions entre parenthèses sont homogènes, leurs ordres d'homogénéité étant respectivement, selon leurs rangs successifs, $m - 1$, $m - 2, \ldots$; si donc on divise cette dernière équation par x'^{m-1}, elle pourra s'écrire

$$c'\left[\frac{df}{dy'}\left(1, \frac{y'}{x'}\right) + \frac{1}{x'}\frac{d\varphi}{dy'}\left(1, \frac{y'}{x'}\right) + \ldots\right] + \frac{df}{dx'}\left(1, \frac{y'}{x'}\right) + \frac{1}{x'}\frac{d\varphi}{dx'}\left(1, \frac{y'}{x'}\right) + \ldots = 0,$$

et, pour $x' = \infty$ et par suite $\frac{y'}{x'} = c$, elle se réduira à

$$(1) \qquad c'\frac{df}{dy'}(1, c) + \frac{df}{dx'}(1, c) = 0.$$

D'ailleurs, quels que soient x' et y', on a, en vertu du théorème des fonctions homogènes,

$$y' \frac{df}{dy'}(x', y') + x' \frac{df}{dx'}(x', y') = mf(x', y'),$$

ou bien, en divisant par x'^m,

$$(2) \qquad \frac{y'}{x'} \frac{df}{dy'}\left(1, \frac{y'}{x'}\right) + \frac{df}{dx'}\left(1, \frac{y'}{x'}\right) = mf\left(1, \frac{y'}{x'}\right).$$

Or, si x' est infini, ce qui donne $\frac{y'}{x'} = c$ et en même temps $f(1, c) = 0$, l'équation (2) devient finalement

$$(3) \qquad c\frac{df}{dy'}(1, c) + \frac{df}{dx'}(1, c) = 0,$$

laquelle, comparée à (1), fait voir déjà qu'on a $c' = c$.

En second lieu, l'ordonnée de la tangente à l'origine est

$$d' = y' + \frac{x'\frac{df}{dx'} + x'\frac{d\varphi}{dx'} + \ldots}{\frac{df}{dy'} + \frac{d\varphi}{dy'} + \ldots},$$

que j'écris sous la forme

$$d' = \frac{\left(y'\frac{df}{dy'} + x'\frac{df}{dx'}\right) + \left(y'\frac{d\varphi}{dy'} + x'\frac{d\varphi}{dx'}\right) + \ldots}{\frac{df}{dy'} + \frac{d\varphi}{dy'} + \ldots},$$

ou encore sous la forme équivalente

$$(4) \qquad d' = \frac{m(f + \varphi + \psi + \ldots) - \varphi - 2\psi - \ldots}{f'_{y'}(x', y') + \varphi'_{y'}(x', y') + \ldots}.$$

Or, premièrement, on a $f + \varphi + \psi + \ldots = 0$, puisque le point (x', y') est sur la courbe; ensuite on peut écrire le dénominateur sous la forme

$$(5)\qquad x'^{m-1}f'_{y'}\left(1,\frac{y'}{x'}\right)+x'^{m-2}\varphi'_{y'}\left(1,\frac{y'}{x'}\right)+\ldots,$$

et il est manifeste que les facteurs

$$f'_{y'}\left(1,\frac{y'}{x'}\right),\quad \varphi'_{y'}\left(1,\frac{y'}{x'}\right),\ldots$$

sont composés avec 1 et $\frac{y'}{x'}$, comme les termes correspondants le sont avec x' et y'; de sorte que la forme (5) doit être, pour l'exactitude des symboles, remplacée par

$$x'^{m-1}f'_{\frac{y'}{x'}}\left(1,\frac{y'}{x'}\right)+x'^{m-2}\varphi'_{\frac{y'}{x'}}\left(1,\frac{y'}{x'}\right)+\ldots.$$

Dès lors, en divisant haut et bas par x'^{m-1} l'expression de d', et passant ensuite aux limites $x'=\infty$ et $\frac{y'}{x'}=c$, il vient

$$d'=-\frac{\varphi(1,c)}{f'_c(1,c)};$$

par conséquent, enfin, $d'=d$, et la tangente en un point à l'infini coïncide exactement avec l'équation de l'asymptote.

II.

J'appliquerai maintenant à la même question ce qu'on appelle la *méthode des homogènes*.

Soit z une fonction de x et y, que je suppose d'abord du premier degré. Si, dans l'équation proposée

$$(\alpha)\qquad f+\varphi+\psi+\ldots=0,$$

on remplace x et y respectivement par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, il viendra une autre équation représentant une autre courbe, voir : l'équation

$$(\beta) \qquad f + z\varphi + z^2\psi + \ldots = 0,$$

qui est *homogène* par rapport aux lettres x, y, z.

On doit supposer d'ailleurs que l'équation (α) satis à ce qu'on a toujours appelé en Géométrie analytiqu *loi de l'homogénéité*. Il faut donc, pour satisfaire à c loi dans l'équation (β), que la fonction z soit *homog et du degré zéro par rapport aux grandeurs linéai* et enfin, pour que la supposition $z = 1$ ramène la seco équation (β) à l'équation primitive (α), il faut que z de la forme

$$z = 1 + ax + by,$$

a et b, qui sont respectivement $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, étant des pa mètres inversement proportionnels à des grandeurs néaires et susceptibles de s'annuler simultanément. sait bien d'ailleurs que, lorsque a et b s'annulent ef tivement, la droite $z = 0$ s'éloigne alors indéfiniment tous ses points (x, y) sont à l'infini.

Tout cela entendu, j'écris, pour abréger, l'équation sous la forme

$$(\gamma) \qquad f + z\Phi = 0,$$

en supposant, par conséquent,

$$\Phi = \varphi + z\psi + z^2\chi + \ldots.$$

La tangente en un point quelconque x', y', z' de courbe (β) ou (γ) est

$$(\delta) \qquad y - y' = -\frac{\dfrac{df}{dx'} + z'\dfrac{d\Phi}{dx'} + \Phi\dfrac{dz'}{dx'}}{\dfrac{df}{dy'} + z'\dfrac{d\Phi}{dy'} + \Phi\dfrac{dz'}{dy'}}(x - x').$$

Or si l'on admet que dans ces formules z' soit égal à l'unité, et en même temps que $\frac{dz'}{dx'}$ et $\frac{dz'}{dy'}$ (c'est-à-dire a ɜt b) soient nuls, ce sera admettre que le point (x', y') ɜst à la fois sur la courbe (α) et sur une droite située out entière à l'infini. Mais alors, pour déterminer la angente en ce point, c'est-à-dire l'asymptote, on re-rouve les calculs du précédent paragraphe.

III.

Dans cette application de la *méthode des homogènes*, ›n suppose que a et b soient nuls en même temps sans que ·ien soit déterminé sur la valeur de leur rapport lors-ju'ils s'évanouissent. On est donc conduit à considérer es points situés à l'infini sur la courbe proposée, et qui lonnent lieu à la recherche des asymptotes, comme étant ur une droite située elle-même à l'infini, et dont la di-·ection, dépendant manifestement du rapport des para-nètres a et b, est indéterminée.

D'ailleurs la même auxiliaire z pourrait être employée ›our toute autre courbe dont les branches à l'infini n'au-aient rien de commun avec la courbe particulière prise l'abord comme exemple; pour toute courbe, en un mot, lont les points à l'infini seraient placés ailleurs que ceux, ıussi à l'infini, de la première.

Voilà comment on a pu être conduit à dire que *les ›oints situés à l'infini sur un plan sont en ligne droite;* nais il faut bien se garder de prendre à la lettre une telle ocution, qui ne doit être acceptée que comme une façon onventionnelle d'exprimer un résultat de calcul. Aussi ›ien, que serait-ce pour ces points à l'infini que d'être itués sur une ligne droite de *direction indéterminée?* Et omment une ligne (droite ou courbe) pourrait-elle être le lieu de points *situés à l'infini*, puisqu'on ne peut se représenter une ligne quelconque (droite ou courbe) que par les deux régions de l'en deçà et de l'au delà qu'elle sépare? Et que serait-ce que l'au delà de l'infini?

Une autre considération est bien propre à montrer qu'une telle locution ne peut être acceptée qu'en sens conventionnel et symbolique : c'est que l'emploi de la *méthode des homogènes*, pour la détermination des asymptotes, ne suppose pas que l'auxiliaire z soit une fonction du premier degré en x et y. Tous les calculs du paragraphe précédent subsisteront sans aucune complication, sans aucun changement, si l'on suppose que z soit une fonction quelconque, pourvu toutefois qu'elle soit d'ordre zéro par rapport aux grandeurs linéaires, et susceptible de se réduire à l'unité lorsque ses paramètres s'annulent; de sorte que, si on la suppose algébrique, elle doit être de la forme

$$1 + ax + by + cx^2 + dxy + fy^2 + \ldots.$$

Sous ces conditions, l'équation (δ) représentera de nouveau la tangente à la courbe (β) et deviendra aussi l'équation de l'asymptote à la courbe (α) quand on fera évanouir les paramètres $a, b, c, \ldots.$

Mais alors on serait donc fondé à dire que les points à l'infini de la courbe quelconque (α) et, par conséquent, que tous les points à l'infini du plan sont sur une courbe de la nature de celles que représente l'équation

$$(A) \qquad 0 = 1 + ax + by + cx^2 + dxy + fy^2 + \ldots?$$

Oui, on y serait autorisé, ou tout au moins ce ne serait ni plus faux ni plus vrai que d'affirmer que ces points à l'infini sont en ligne droite.

Car si l'on peut dire de la droite

$$1 + ax + by = 0$$

qu'elle passe à l'infini lorsque a et b s'annulent, il y a même motif de dire que la courbe (A) passe à l'infini lorsque les paramètres a, b, c,... s'évanouissent. Pour rendre cela sensible, il suffit de former l'équation aux abscisses des rencontres de cette courbe avec la droite $y = mx$, et de supposer ensuite l'évanouissement des paramètres.

C'est ainsi, par exemple, qu'en faisant décroître indéfiniment les paramètres des équations

$$1 - a^2x^2 - a^2y^2 = 0, \quad 1 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0, \quad \ldots,$$

on trouverait à volonté que les points à l'infini sont sur un cercle, sur une ellipse, etc.

Le dernier mot de tout cela, c'est qu'il n'y a pas dans le calcul de véritables infinis, le mot *infini*, comme chacun le sait bien, n'ayant pas d'autre emploi, en Mathématiques, que de remplacer le mot *indéfini*, lequel ne peut lui-même correspondre qu'à des grandeurs *indéterminées*; et alors le lointain indéfini (indéterminé) d'un plan peut, en effet, être conçu sous telle forme qu'on veut, puisque ce n'est jamais *la fin du plan*.

J'ai déjà ailleurs critiqué cette locution, que *les points à l'infini d'un plan sont en ligne droite*; mais, comme je l'ai dit alors, s'il est vrai que l'infini absolu ne puisse jamais être l'objet du calcul, c'est toutefois un élément essentiel de l'intelligence, une idée aussi inhérente à l'esprit humain que les idées de cause et de substance; et je crois avoir montré que, sans vouloir faire entrer cette idée dans le calcul, il n'y a pas lieu, pour le géomètre, de la repousser indéfiniment; car elle s'offre à lui tout au moins dans le *postulatum* d'Euclide, et peut lui servir à transformer ce *postulatum* en un *théorème démontrable*. (*Voir* l'opuscule publié sous ce titre : *De l'Infini, ou*

Métaphysique et Géométrie; 1871. Paris, Gauthier-Villars.)