Nouvelles annales de mathématiques

Moret-Blanc

Questions 1112, 1113, 1114, 1115 et 1116

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 278-285

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__278_1>

QUESTIONS 1112, 1113, 1114, 1115 ET 1116

(voir même tome, p. 192);

PAR M. MORET-BLANC.

1112. *Montrer que la développée de l'ellipse peut être considérée comme l'enveloppe d'ellipses concentriques et co-axales à la proposée.* (C. DE POLIGNAC.)

La développée de l'ellipse

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a, comme on sait, pour équation,

$$(2) \qquad \left(\frac{x}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

en posant, pour abréger, $\frac{c^2}{a} = a_1$ et $\frac{c^2}{b} = b_1$.

Pour que les ellipses variables

$$(3)\qquad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

aient pour enveloppe la développée de la première, il est nécessaire que les paramètres α et β soient liés par une relation telle que, pour $\beta=0$, $\alpha=\frac{c^2}{a}$, et, pour $\alpha=0$, $\beta=\frac{c^2}{b}$. La relation la plus simple satisfaisant à cette condition est

$$(4)\qquad a\alpha+b\beta=c^2.$$

Différentiant les équations (3) et (4) par rapport à α et β, ajoutant les équations résultantes multipliées respectivement par λ et -1, et égalant séparément à zéro les coefficients de $d\alpha$ et de $d\beta$, on a

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\lambda\frac{x^2}{\alpha^3}-a=0,\\ &\lambda\frac{y^2}{\beta^3}-b=0.\end{aligned}\right.$$

Ajoutant ces équations multipliées respectivement par α et λ, et ayant égard aux équations (3) et (4), il vient

$$\lambda-c^2=0\quad\text{ou}\quad\lambda=c^2.$$

Les équations (5) donnent ensuite

$$\frac{x^2}{\alpha^3}=\frac{a}{c^2}=\frac{1}{a_1},$$

$$\frac{y^2}{\beta^3}=\frac{b}{c^2}=\frac{1}{b_1},$$

d'où

$$\frac{x^2}{\alpha^2}=\left(\frac{x}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}},\quad \frac{y^2}{\beta^2}=\left(\frac{y}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Ces valeurs, reportées dans l'équation (3), donnent, pour équation de l'enveloppe cherchée,

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

C'est précisément l'équation (2) de la développée de l'équation (1).

Note. — La même question a été résolue par MM. E. Laurens, professeur au lycee de Rouen; Pouja le, professeur au lycée de Nice; Gambey, professeur au lycée de Saint-Étienne; A. Chervet, elève du lycée de Moulins.

1113. *Le rayon de courbure du point de l'ellipse, qui est égal au demi-diamètre conjugué de ce point, a son extrémité sur ce diamètre. Il est tangent au cercle concentrique à l'ellipse ayant la demi-différence des axes pour rayon.* (C. DE POLIGNAC.)

Soient O le centre de l'ellipse, M le point jouissant de la propriété énoncée, C le centre de courbure correspondant. Il faut prouver que le triangle OCM est rectangle en C, et que OC $= a - b$.

Soit ω le paramètre angulaire du point M,

$$OM = \sqrt{a^2 \cos^2\omega + b^2 \sin^2\omega},$$

le demi-diamètre conjugué $= \sqrt{a^2 \sin^2\omega + b^2 \cos^2\omega}$, et le rayon de courbure en M $= \dfrac{(a^2 \sin^2\omega + b^2 \cos^2\omega)^{\frac{3}{2}}}{ab}$.

On aura donc

$$\frac{(a^2 \sin^2\omega + b^2 \cos^2\omega)^{\frac{2}{3}}}{ab} = (a^2 \sin^2\omega + b^2 \cos^2\omega)^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$a^2 \sin^2\omega + b^2 \cos^2\omega = ab.$$

On tire de là

$$\sin^2\omega = \frac{b}{a+b}, \quad \cos^2\omega = \frac{a}{a+b}.$$

On a donc

$$OM^2 = \frac{a^3+b^3}{a+b} = a^2 - ab + b^2,$$

$$CM^2 = \frac{a^2b+ab^2}{a+b} = ab,$$

$$OM^2 - CM^2 = (a-b)^2.$$

D'ailleurs l'équation de la normale en M étant

$$a\sin\omega\, x - b\cos\omega\, y = (a^2-b^2)\sin\omega\cos\omega,$$

le carré de la perpendiculaire abaissée du centre sur cette normale est

$$\frac{(a^2-b^2)^2\sin^2\omega\cos^2\omega}{a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega} = \frac{(a-b)^2ab}{ab} = (a-b)^2.$$

Elle tombe donc au point C, qui appartient, par suite, au conjugué du demi-diamètre OM, et de plus le rayon de courbure est tangent à la circonférence décrite du centre de l'ellipse avec le rayon $a-b$ (*).

(*) Soient OX, OY les directions des axes $2a$, $2b$ de l'ellipse; DC le rayon de courbure en un point D de cette courbe; ADB la tangente en D, perpendiculaire à DC, et rencontrant en des points A, B les droites OX, OY.

On sait que le rayon de l'ellipse conjugué de OD est parallèle à la tangente ADB, et moyen géométrique entre les segments AD, DB. Donc, si le rayon de courbure DC est égal à ce rayon conjugué, le point C appartient nécessairement à la circonference décrite sur AB comme diamètre. De plus, la droite CD prolongée rencontrant cette circonférence en un point C′, tel que DC′ = DC, si du point C′ on abaisse une perpendiculaire sur OD, on aura, d'après la proposition de Steiner, dont une démonstration géométrique a été donnée (t. X, 2e série, p. 462),

$$OH \times OD = a^2 + b^2,$$

d'où

$$OD \times DH = a^2 + b^2 - OD^2 = DC^2 = DC \times DC'.$$

L'égalité $OD \times DH = DC \times DC'$ montre que les quatre points O, H, *Note.* — La même question a été résolue par MM. Abel Prétet, élève du collége Stanislas; Gambey, professeur au lycée de Saint-Étienne; Poujade, professeur au lycée de Nice; Louis Cauret, professeur au lycée du Mans; E. Laurens, professeur au lycée de Rouen; A. Tourrettes, surveillant général au lycée d'Albi; A. Chervet, élève du lycée de Moulins; Bance, maître répétiteur au lycée de Rouen; V. Jamet, elève du lycée de Bordeaux; Bourguet, à Nantes; H. Lez, à Lorrez.

1114. *Les cercles concentriques à l'ellipse, dont les rayons sont respectivement la somme et la différence de ses axes, interceptent sur toute normale à l'ellipse des segments dont deux sont toujours égaux. En donner l'expression.* (C. DE POLIGNAC.)

1115. *Montrer que l'on peut tracer une infinité d'ellipses concentriques et co-axales à une ellipse donnée jouissant deux à deux de la même propriété. Les axes de l'ellipse peuvent être regardés comme deux ellipses (non correspondantes) de la série.*

(C. DE POLIGNAC.)

1116. *Deux ellipses quelconques de la série inter-*

C, C′ sont sur une même circonférence; donc l'angle OCC′ est droit et la droite OC est parallèle à ADB. Par conséquent, le point C appartient au diamètre conjugué de OD.

D'autre part, il résulte de la construction bien connue, qui détermine les axes d'une ellipse dont on donne deux diamètres conjugués, que $OC = a - b$ et $OC' = a + b$; donc le rayon de courbure DC est tangent à la circonférence décrite du centre O de l'ellipse avec $(a - b)$ pour rayon. C. Q. F. D.

Remarque. — Soient OP une perpendiculaire menée du point O sur AB, et G l'intersection des diamètres OC′, AB; on aura

$$PG = \tfrac{1}{2} PD = \tfrac{1}{2} OC = \tfrac{1}{2}(a - b) \quad \text{et} \quad BG = \tfrac{1}{2} BA = \tfrac{1}{2} OC' = \tfrac{1}{2}(a + b);$$

il s'ensuit

$$BP = b, \quad PA = a, \quad \text{et} \quad OP = \sqrt{ab}, \quad DC = \sqrt{ab}.$$

La droite AB est le minimum des tangentes à l'ellipse comprises entre les axes de la courbe. (G.)

ceptent, sur toute normale à l'ellipse donnée, deux segments dont le rapport est constant.

(C. DE POLIGNAC.)

Les solutions de ces trois questions résultent immédiatement des théorèmes suivants, démontrés par M. Transon, dans les *Nouvelles Annales* :

1° *Si, sur la normale en chaque point d'une ellipse, on porte à partir de ce point, et de part et d'autre, des segments égaux à la moyenne géométrique des deux rayons focaux de ce point, les lieux des extrémités de ces segments sont les deux cercles décrits du centre de l'ellipse avec la demi-somme et la demi-différence des axes pour rayons* (*).

Ce théorème résout complétement la question 1114. J'en reproduis ici la démonstration, en faisant usage de la notation de M. Bellavitis.

Soient O le centre de l'ellipse, C et C′ les deux foyers, Z un point quelconque de la courbe; représentons les droites OC, OC′, OZ par c, $-c$ et z.

On aura, dans les triangles OCZ, OC′Z,

$$\mathrm{CZ} \stackrel{\triangle}{=} z - c, \quad \mathrm{C'Z} \stackrel{\triangle}{=} z + c.$$

La moyenne géométrique entre CZ et C′Z sera $\sqrt{z^2 - c^2}$, dirigée suivant la bissectrice de l'angle des rayons vecteurs, c'est-à-dire suivant la normale.

Soient Y_1, Y_2 les extrémités des segments; désignons OY_1 et OY_2 par y_1 et y_2; on aura

$$y_1 \stackrel{\triangle}{=} z + \sqrt{z^2 - c^2}, \quad y_2 \stackrel{\triangle}{=} z - \sqrt{z^2 - c^2},$$

d'où, en différentiant,

$$\frac{dy_1}{y_1} \stackrel{\triangle}{=} \frac{dz}{\sqrt{z^2 - c^2}}, \quad \frac{dy_2}{y_2} \stackrel{\triangle}{=} \frac{dz}{-\sqrt{z^2 - c^2}}.$$

(*) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. VII, p. 5.

Or dz, dirigé suivant la tangente, fait avec la normale un angle droit; donc, d'après les principes du calcul directif (ou des équipollences), dy_1 fait aussi un angle droit avec y_1, et dy_2 fait un angle droit avec y_2. Les courbes décrites par les points Y_1 et Y_2 sont donc des circonférences concentriques à l'ellipse. En supposant le point Z à l'extrémité du petit axe, les segments deviennent égaux à a, d'où l'on voit que les rayons sont $a+b$ et $a-b$.

2° *Si, en chaque point d'une conique à centre et sur une direction constamment inclinée du même angle sur la normale, on porte une longueur proportionnelle à la moyenne géométrique des deux rayons focaux relatifs à ce point, l'extrémité de cette longueur décrira une nouvelle conique concentrique à la première et de même genre qu'elle* (*).

Ce théorème résout les questions 1115 et 1116.

Pour chaque valeur du rapport, on obtient deux coniques correspondantes; si l'inclinaison sur la normale est nulle, toutes les coniques obtenues sont co-axales à la proposée. Les deux axes de celle-ci font partie de la série (*en les limitant toutefois aux sommets de la développée*); car les portions de normale comprises entre la courbe et les axes ont respectivement pour longueurs

$$N_x = \frac{b}{a}\sqrt{rr'}, \quad N_y = \frac{a}{b}\sqrt{rr'},$$

r et r' étant les deux rayons vecteurs : elles sont donc proportionnelles à $\sqrt{rr'}$.

Enfin, si $m\sqrt{rr'}$ et $m'\sqrt{rr'}$ sont les segments interceptés par deux ellipses quelconques de la série, ils sont dans le rapport constant $\frac{m}{m'}$.

(*) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XII, p. 5.

Note. — Les mêmes questions ont ete resolue par MM. Bourguet, à Nantes; Poujade, professeur au lycee de Nice; A. Chervet, elève du lycee de Moulins. La question 1114 l'a ete aussi par MM. A. Tourettes, surveillant general au lycee d'Albi; G. Gallard, eleve du lycee de Rennes.