NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. CARON

Note sur la détermination des asymptotes dans les intersections des surfaces du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 270-278

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__270_1>

NOTE SUR LA DÉTERMINATION DES ASYMPTOTES DANS LES INTERSECTIONS DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ ;

PAR M. J. CARON,

Directeur des travaux graphiques à l'École Normale supérieure.

Pour construire l'intersection de deux surfaces du second degré, on coupe ces deux surfaces par une troisième surface variable rencontrant les deux premières suivant deux courbes. Les points communs à ces deux courbes appartiennent aussi à l'intersection.

On emploie de préférence, comme surfaces auxiliaires, des plans. La direction de ces plans n'est pas arbitraire. Il convient en effet, pour simplifier les constructions, d'employer, comme plans sécants, des plans donnant dans les deux surfaces des courbes homothétiques.

Je supposerai donc qu'on ait trouvé un plan A donnant dans les deux surfaces des courbes homothétiques.

Je supposerai aussi que ces courbes homothétiques soient du genre hyperbole ou du genre ellipse, en me réservant d'examiner à part le cas où elles seraient du genre parabole.

Soit A_1 l'un de ces plans; il coupe la surface S suivant une conique c et la surface S' suivant une deuxième conique c', homothétique de la première.

Les deux coniques c et c' se rencontrent en deux points M, N de l'intersection I, les deux autres points étant à l'infini.

Ainsi un plan quelconque parallèle au plan A ne coupe l'intersection I qu'en deux points, les deux autres étant constamment à l'infini. C'est pour cette raison que je donnerai à la direction des plans A le nom de direction asymptotique de la courbe I.

Quand le plan A se déplace, les deux points M et N décrivent la courbe I. Voyons ce qui arrive quand ces points s'éloignent à l'infini.

Ces deux points, pour une position particulière du plan sécant A, peuvent s'éloigner à l'infini, soit isolément, soit simultanément. Nous avons donc deux cas à examiner.

1° *L'un des points* M *et* N *s'éloigne seul à l'infini.* — Pour que deux courbes homothétiques du second degré, et à centre, se coupent en un seul point à distance finie, il faut et il suffit que ces deux courbes soient du genre hyperbole, et qu'elles aient une asymptote commune.

Cherchons donc le plan A donnant deux coniques c et c' ayant une asymptote commune, et déterminons la position de cette asymptote commune.

Soit α ou α' la direction commune d'une des asymptotes des courbes c et c', et soit de plus α_1 ou α'_1 la position de l'asymptote commune.

Pour trouver cette asymptote, je remarque qu'elle passe dans toutes ces positions par le centre de la courbe c ou c' à laquelle elle appartient.

Or le lieu du centre de la courbe c est le diamètre conjugué ax du plan A dans la surface S; de même le lieu du centre de la courbe c' est le diamètre conjugué $a'x'$ du plan A dans la surface S'.

Donc l'asymptote commune α_1 ou α'_1 est assujettie à rencontrer les deux diamètres conjugués ax, $a'x'$. Elle s'obtient par conséquent en menant une parallèle à l'une quelconque des asymptotes de la courbe c ou c' s'appuyant sur les diamètres conjugués du plan A dans les deux surfaces.

Je dis maintenant que cette asymptote commune est aussi une asymptote de l'intersection I. Pour le faire voir, il suffit de montrèr que cette asymptote commune n'est autre chose que l'intersection des plans tangents à l'infini aux deux surfaces S, S', les points de contact étant sur les génératrices des deux surfaces qui sont parallèles à α ou α_1, et par suite parallèles entre elles.

En effet, le plan tangent au cône asymptote Γ de la surface S, le long de la génératrice α_2 de ce cône parallèle à α ou α', contient le diamètre conjugué ax du plan A qui est parallèle à α_2 (*). Par conséquent, toute droite

(*) Le diamètre conjugué d'un plan A, par rapport à un cône, n'est autre chose que l'intersection des plans tangents au cône le long des génératrices α_2, β_2 du cône contenues dans le plan parallèle au plan A mené par le sommet.

du plan tangent, et en particulier l'asymptote, rencontre le diamètre conjugué ax.

De même, toute droite du plan tangent au cône asymptote Γ' de la surface S' le long de la génératrice α'_2 rencontre le diamètre conjugué $a'x'$ du plan A par rapport à cette surface.

Donc l'asymptote à l'intersection I étant l'intersection de ces deux plans tangents rencontre simultanément les diamètres ax, $a'x'$. De plus, les deux plans tangents étant menés respectivement par les deux droites α_2, α'_2 qui sont parallèles, leur intersection est aussi parallèle à ces droites, et par suite elle coïncide avec l'asymptote commune α_1 ou α'_1 trouvée précédemment.

2° *Les deux points* M *et* N *s'éloignent simultanément à l'infini.* — Pour que deux courbes homothétiques du second degré et à centre ne se rencontrent en aucun point à distance finie, il faut et il suffit que ces deux courbes aient même centre.

Supposons donc que les deux diamètres conjugués ax, $a'x'$ se rencontrent en un point ω. Le plan A_1 mené par ce point coupera les deux surfaces suivant deux coniques c, c' ayant même centre. La courbe I est donc rencontrée par ce plan A_1 en quatre points qui sont tous les quatre à l'infini.

Si les deux courbes c et c' sont du genre hyperbole, les points M et N qui se sont éloignés à l'infini donnent des branches de courbe réelles. L'intersection I a alors deux asymptotes réelles qui ne sont autre chose que les parallèles aux deux asymptotes des courbes c et c' menées par le point ω.

Au contraire, si les deux courbes c et c' sont du genre ellipse, les points M et N, en s'éloignant à l'infini, deviennent imaginaires, et le plan A_1 mené par le point ω est un plan asymptotique à une partie imaginaire de l'intersection I.

Je m'arrêterai un instant à l'examen de ce dernier plan asymptotique; car il conduit à la construction d'une asymptote d'un genre particulier, et qu'on ne pouvait trouver par la méthode ordinaire.

Les hypothèses sont donc les suivantes :

1° Le plan A coupe les deux surfaces S, S' suivant deux coniques c, c' homothétiques.

2° Les deux diamètres ax, $a'x'$ conjugués du plan A dans les deux surfaces se rencontrent, ou plutôt déterminent un plan $\omega axa'x'$.

Ce plan $\omega axa'x'$ rencontre le plan A suivant une droite pz qui a pour conjuguée, par rapport aux deux coniques c, c', une même droite py.

Nous voyons donc que les deux surfaces S, S' ont un même plan diamétral $\omega axa'x'$ conjugué de la direction py. Par conséquent, la projection de l'intersection I parallèlement à py sur le plan diamétral commun $\omega axa'x'$ est une courbe du second degré. Cette courbe du second degré i ne convient pas tout entière comme projection de l'intersection.

Si les coniques c, c' sont du genre hyperbole, la projection i a une branche infinie projection de deux branches infinies et réelles de l'intersection.

Au contraire, si les deux coniques c, c' sont du genre ellipse, la projection i a encore une branche infinie dont pz est l'asymptote, mais qui est alors la projection d'une partie imaginaire de l'intersection I.

La méthode des plans tangents à l'infini donne bien l'asymptote dans le premier cas, mais elle ne peut la donner dans le second.

Cette méthode des diamètres conjugués pour la détermination des asymptotes est donc plus générale que celle de plans tangents à l'infini, et de plus elle donne souvent lieu à des constructions beaucoup plus simples.

Le cas qui nous occupe se présente fréquemment. Ainsi on aura à appliquer la méthode que je donne ici, dans le cas de l'intersection de deux surfaces de révolution du second degré, dont les axes sont dans un même plan parallèle au plan vertical, et plus généralement encore, dans tous les cas d'intersection de deux surfaces du second degré qui ont un plan diamétral commun (qui peut être un plan diamétral principal), correspondant à une même direction de cordes perpendiculaires à l'un des plans de projection.

Je vais examiner maintenant le cas où les sections par le plan A sont du genre parabole.

Pour que deux paraboles homothétiques (c'est-à-dire dont les axes sont parallèles) se coupent en un seul point à distance finie, il faut et il suffit : 1° qu'elles soient dirigées dans le même sens; 2° qu'elles soient égales.

On déterminera donc le plan A_1 de manière à lui faire couper les deux surfaces suivant deux paraboles égales. Si ces deux paraboles sont de même sens, elles seront asymptotes entre elles, et en même temps asymptotes à l'intersection I. Cette intersection sautera d'une branche des paraboles à l'autre branche, le plan sécant se déplaçant en passant par la position A_1.

Nous voyons donc que, dans ce cas, l'intersection aura deux branches paraboliques asymptotes de chaque branche des paraboles c, c' contenues dans le plan A_1.

La projection de l'intersection sur un plan perpendiculaire au plan A_1, pris par exemple pour plan horizontal, a une asymptote parallèle à la ligne de terre, avec un point de rebroussement à l'infini, ce point appartenant aux deux contours apparents en projection verticale.

Si les deux paraboles du plan A_1 sont égales, de même sens, et de plus ont même axe, les deux points M et N s'éloigneront simultanément à l'infini.

Pour trouver la position du plan A_1, nous nous servirons des théorèmes suivants :

1° *Les sections d'un cylindre par des plans parallèles sont égales.*

2° *Les sections paraboliques d'un paraboloïde par des plans parallèles sont égales.*

3° *Les sections par un même plan d'un hyperboloïde et de son cône asymptote (ces sections étant des paraboles) sont égales.*

A l'aide de ces trois théorèmes, nous ramènerons la détermination du plan A_1 à la résolution des deux problèmes suivants :

1° Un plan A coupant un cône donné suivant une parabole, trouver un plan parallèle au plan A coupant le cône suivant une parabole égale à une parabole donnée.

2° Un plan A coupant deux cônes suivant deux paraboles ayant leurs axes parallèles, trouver un plan A_1 parallèle au plan A coupant les deux cônes suivant deux paraboles égales.

Solution du premier problème. — Je mène un plan tangent au cône parallèle au plan A, et dans ce plan je place la parabole donnée c, de manière qu'elle passe par le sommet du cône, et qu'elle ait son axe parallèle à la génératrice de contact. Cette parabole a pour tangente, au sommet du cône, une droite st. Par cette droite, je mène un second plan tangent au cône. Soit sb la génératrice de contact.

Si, par un point quelconque de la parabole c, je mène une parallèle à la droite sb, elle coupe le cône en un point m, et le plan mené par le point m parallèlement au plan A coupe le cône suivant une parabole égale à la parabole c.

En effet, si l'on amène ces deux paraboles à être dans le même plan (par un transport parallèle à sb), on voit aisément qu'elles ont deux points communs avec une tangente en l'un de ces points communs, et les axes parallèles, ce qui fait quatre conditions communes.

On voit par là que le problème est toujours possible et n'admet qu'une seule solution, en tenant compte de la direction de la parabole c.

Solution du second problème. — Soient les deux cônes s, s' et les plans tangents A, A' parallèles ainsi que les deux génératrices de contact $s\alpha$, $s'\alpha'$.

Par le point s je mène dans le plan A deux droites arbitraires st, st_1, et par le point s' deux parallèles $s't'$, $s't'_1$.

Ces droites déterminent quatre plans tangents dont les génératrices de contact sont sb, sb_1 pour le premier cône, $s'b'$, $s'b'_1$ pour le second.

Je ferai remarquer tout d'abord que les plans sbb_1, $s'b'b'_1$ des génératrices de contact sont coupés par un plan A suivant deux droites parallèles.

En effet, ces droites sont les cordes de contact, par rapport à deux paraboles qui ont leurs axes parallèles, de deux systèmes de tangentes parallèles deux à deux (car les deux tangentes de la première parabole sont parallèles à st, st_1, et celles de la seconde à $s't$, $s't'_1$).

Soit A_1 le plan cherché, b, b_1, b', b'_1 les quatre points d'intersection du même plan avec les quatre génératrices de contact.

Si les deux paraboles sont égales, les deux cordes bb_1, $b'b'_1$ le sont aussi. La réciproque étant vraie, la question se ramène à la suivante : couper les deux faisceaux $sbsb_1$, $s'b's'b'_1$ par un plan A_1 parallèle au plan A, de manière que les cordes interceptées $bb_1, b'b'_1$ soient égales.

Pour résoudre ce dernier problème, je mène par les deux sommets s, s' et par un point quelconque de l'espace trois plans parallèles au plan A. Ces trois plans sont coupés par une droite quelconque en trois points σ, σ' et ω. Le troisième plan mené par le point quelconque ω détermine dans les deux faisceaux $sbsb_1$, $s'b's'b'_1$ deux cordes $dd_1, d'd'_1$. Je prends alors sur une droite quelconque du troisième plan passant par ω, et à partir du point ω, deux longueurs $\omega\delta$, $\omega\delta'$ dans le même sens, égales respectivement à $dd_1, d'd'_1$. Ceci fait, je joins $\sigma\delta$, $\sigma'\delta'$ qui se rencontrent au point β. Le plan parallèle au plan A mené par ce point β est le plan cherché A_1.

Nous avons donc toujours une solution et une seule.

Exemple. — Construire l'intersection de deux cônes ayant pour base, dans le plan horizontal, deux paraboles dont les axes sont parallèles.