Nouvelles annales de mathématiques

H. Durrande

Note sur l'application des déterminants à la théorie des moments des forces

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 265-269

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__265_1>

NOTE SUR L'APPLICATION DES DÉTERMINANTS A LA THÉORIE DES MOMENTS DES FORCES;

PAR M. H. DURRANDE,
Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.

1. Je ne sais si l'on a remarqué l'analogie frappante qui existe entre les théorèmes bien connus relatifs aux moments des forces et les propriétés les plus élémentaires des déterminants. On pourrait dire que les déterminants du second et du troisième degré sont les *images analytiques* des moments d'une force par rapport à un point et par rapport à un axe.

On voit, par exemple, immédiatement que, pour l'observateur placé suivant l'axe des Z, ayant l'axe des X à sa gauche, l'axe des Y à sa droite, le moment, par rapport à l'origine, d'une force (X, Y) située dans le plan des XY, et passant par un point (x, y) de ce plan, est représenté en grandeur et en signe par le déterminant du second degré

$$\begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix},$$

dans lequel on peut considérer X, Y comme les coordonnées d'un point; car ce déterminant est bien l'*image analytique* du parallélogramme ayant pour base la force et pour hauteur sa distance à l'origine, ce qui n'est autre chose que le moment.

2. Si l'on considère plusieurs forces situées dans le plan des XY, et concourant au même point (x, y), on aura, pour la somme de leurs moments par rapport à l'origine,

$$\begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ X' & Y' \end{vmatrix} + \ldots = \begin{vmatrix} x & y \\ \Sigma X & \Sigma Y \end{vmatrix},$$

en vertu d'une des relations les plus élémentaires des déterminants. Or la force $(\Sigma X, \Sigma Y)$ est la résultante des forces données, et l'on conclut de là le théorème fondamental de la théorie des moments par rapport à un point.

3. On verra ensuite, avec la même facilité, que le moment d'une force (X, Y, Z), située d'une manière quelconque dans l'espace, par rapport à un axe passant par l'origine, de direction (λ, μ, ν), est en grandeur et en signe

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ X & Y & Z \\ \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \end{vmatrix},$$

(x, y, z) désignant encore les coordonnées d'un point quelconque pris sur la direction de la force.

Ce mode de représentation des moments s'offre assez naturellement à l'esprit lorsqu'on se souvient que le déterminant du second degré peut être considéré comme l'aire du parallélogramme ou le double de celle du triangle, et le déterminant du troisième degré comme le volume du parallélépipède ou six fois le volume du tétraèdre. Or, de même que le moment d'une force par rapport à un point équivaut à l'aire d'un parallélogramme, de même le moment, par rapport à un axe, équivaut à six fois le volume du tétraèdre ayant son sommet à l'origine, et pour arêtes, une longueur égale à l'unité prise sur l'axe des moments, la distance du point (x, y, z) à l'origine, et enfin une droite égale et parallèle à la force donnée menée par l'origine.

Je n'entre, bien entendu, dans aucun détail, ne voulant pas refaire ici une théorie des moments, que le lecteur fera bien lui-même d'après ces rapides indications. Je veux seulement montrer, par une application, avec quelle facilité certains théorèmes sur les moments se déduisent de transformations immédiates exécutées sur les déterminants qui les représentent.

4. Considérons deux forces quelconques $\begin{pmatrix} X, Y, Z \\ x, y, z \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} X', Y', Z' \\ x', y', z' \end{pmatrix}$, et formons la somme de leurs moments par rapport à la résultante de deux forces égales et parallèles menées par un point quelconque pris comme origine, c'est-à-dire par rapport à leur résultante de translation ; on aura, pour la somme de ces moments, en remarquant que les cosinus des angles qui donnent la direction de la résultante sont $\frac{\Sigma X}{R}$, $\frac{\Sigma Y}{R}$, $\frac{\Sigma Z}{R}$,

$$\frac{1}{R}\left\{ \begin{vmatrix} x & y & z \\ X & Y & Z \\ \Sigma X & \Sigma Y & \Sigma Z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ X' & Y' & Z' \\ \Sigma X & \Sigma Y & \Sigma Z \end{vmatrix} \right\}.$$

En remplaçant ΣX par $X + X', \ldots$, décomposant chaque déterminant en déterminants partiels et supprimant ceux qui sont nuls, il reste, après réduction,

$$\frac{1}{R}\begin{vmatrix} x - x' & y - y' & z - z' \\ X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \end{vmatrix}.$$

Or ce déterminant représente six fois le volume du tétraèdre ayant pour arêtes opposées les deux forces données (X, Y, Z), (X', Y', Z').

Donc *la somme des moments de deux forces quelconques par rapport à un axe parallèle à leur résultante de translation est indépendante de la position de cet axe et égale à six fois le volume du tétraèdre ayant ces forces pour arêtes opposées, divisé par la grandeur de la résultante.*

5. Ce théorème se généralise ensuite de la manière suivante :

Considérons un groupe de n forces appliquées à un solide invariable

$$\begin{pmatrix} X, Y, Z \\ x, y, z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X', Y', Z' \\ x', y', z' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X'', Y'', Z'' \\ x'', y'', z'' \end{pmatrix}, \ldots;$$

la somme de leurs moments par rapport à leur résultante de translation est

$$\frac{1}{R}\sum\begin{vmatrix} x & y & z \\ X & Y & Z \\ \Sigma X & \Sigma Y & \Sigma Z \end{vmatrix};$$

en opérant comme dans le cas de deux forces, il vient

$$\frac{1}{R}\sum\begin{vmatrix} x - x' & y - y' & z - z' \\ X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \end{vmatrix}.$$

Donc *la somme des moments de n forces appliquées à un corps solide par rapport à un axe parallèle à leur résultante de translation est indépendante de la position de cet axe et égale à six fois la somme des volumes des* $\frac{n(n-1)}{2}$ *tétraèdres construits sur les forces prises deux à deux comme arêtes opposées, divisée par la grandeur de la résultante.*

Maintenant, si l'on observe que la substitution à un groupe de forces d'un autre groupe équivalent n'altère en rien la somme de leurs moments, puisque cela revient à introduire des forces dont les moments par rapport à un axe quelconque sont égaux et de signes contraires, on en conclura que :

De quelque manière que l'on réduise un système de n forces à deux résultantes, le volume du tétraèdre construit sur ces dernières comme arêtes opposées est constant et équivalent à la somme des volumes des $\frac{n(n-1)}{2}$ *tétraèdres construits sur les forces données prises deux à deux comme arêtes opposées.*

Ces théorèmes, dus, je crois, à M. Chasles, sont bien connus; mais j'ignore si l'on a songé à les démontrer par les considérations précédentes, qui me paraissent très-simples.