SABINE

Sur l'accélération normale à la trajectoire d'un point d'un système invariable mobile dans son mouvement le plus général

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 257-265

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__257_1>

SUR L'ACCÉLÉRATION NORMALE A LA TRAJECTOIRE D'UN POINT D'UN SYSTÈME INVARIABLE MOBILE DANS SON MOUVEMENT LE PLUS GENERAL;

PAR M. SABININE,
Professeur a l'Universite d'Odessa.

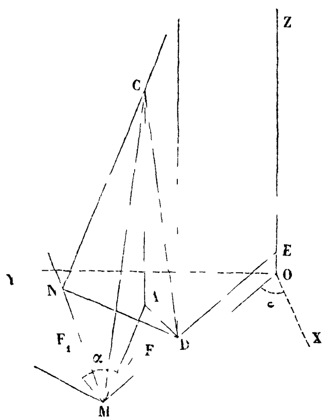
M. H. Resal, dans un Mémoire remarquable sur la Cinématique, intitulé : *Sur les propriétés géométriques du mouvement le plus général d'un corps solide* (*), donne pour l'accélération normale (p. 239) une expres-

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, t. XXI, 37e Cahier, p. 227; 1858.

sion qui n'a pas lieu en général, et qui n'est applicable qu'au cas où l'accélération totale rencontre l'axe instantané. C'est ce qne nous allons démontrer, en donnant en même temps l'expression de l'accélération normale pour le cas le plus général.

Soient (*fig.* 1) OE l'axe instantané de rotation et de

Fig. 1.



glissement, et O le point où l'axe instantané est coupé par sa plus courte distance à sa position suivante; M un point du système; φ l'accélération totale de M, représentée sur la *fig.* 1 par MC; r la distance de M à l'axe instantané OE, représentée par ME; MF_1 la tangente en M au cercle que décrirait ce point en tournant autour de l'axe OE; MF la tangente et MN la normale principale en M à la trajectoire de ce point M. Toutes ces droites sont rapportées à trois axes rectangulaires, tels que les choisit M. Resal dans son Mémoire cité : pour l'origine des trois axes coordonnés, nous prenons le point O; pour l'axe Z, l'axe instantané, en supposant que les axes X et Y soient perpendiculaires entre eux et à l'axe OZ; tandis que l'axe OX est dirigé suivant la vitesse orthogonale. En menant perpendiculairement les deux droites AD et AC, la première à MD et la seconde au plan EMF_1, on voit que la droite CD sera perpendiculaire à MD; par conséquent, cette droite MD est perpendiculaire au plan CAD et, de plus, au plan FMF_1, qui est parallèle à l'axe OZ; d'où il résulte que : 1° le plan normal, passant par MD, rencontre l'axe instantané OZ dans le point E; 2° le plan CAD, passant par le point C, est perpendiculaire au plan normal. Or, l'accélération totale φ étant dans le plan osculateur FMN, la perpendiculaire CN, abaissée du point C sur la normale principale MN, sera aussi perpendiculaire au plan normal; donc la droite CN se trouve dans le plan CAD et la droite ND est perpendiculaire à MD, comme l'intersection du plan CAD avec le plan normal.

Soient X, Y, Z les composantes de l'accélération φ parallèles aux axes OX, OY, OZ, égales respectivement au second membre de la seconde, de la troisième et de la première des équations (8) (p. 239) de M. Resal.

Appelant φ_n l'accélération normale et φ_t l'accélération tangentielle, nous aurons

$$(1) \qquad \varphi = \sqrt{\varphi_n^2 + \varphi_t^2}.$$

En désignant par S la projection de l'accélération φ sur la droite ME et par S_1 la projection de l'accélération φ_n sur le plan CAD, le triangle rectangle MND donnera

$$(2) \qquad \varphi_n = \sqrt{S^2 + S_1^2}.$$

Nommons L la vitesse de glissement, ω la vitesse angulaire instantanée autour de OE, et a l'angle que forme ωr

avec la vitesse $v = \sqrt{\omega^2 r^2 + L^2}$ du point M; alors

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \tang a &= \frac{L}{\omega}, \\ \cos a &= \frac{\omega r}{\sqrt{\omega^2 r^2 + L^2}}, \\ \sin a &= \frac{L}{\sqrt{\omega^2 r^2 + L^2}}. \end{aligned}\right.$$

Soient

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les trois angles que forme S_1 respectivement avec les trois axes OX, OY, OZ;

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ les trois angles que forme φ_t respectivement avec les mêmes axes;

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ les trois angles que forme ωr respectivement avec les mêmes axes;

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$ les trois angles que forme φ_n respectivement avec les mêmes axes, et

ε l'angle que forme d avec l'axe OX.

Comme l'angle α_3 est égal à l'angle a, nous aurons les équations suivantes :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\beta_1 &= \cos a \cos\gamma_1, \\ \cos\beta_2 &= \cos a \cos\gamma_2, \\ \cos\beta_3 &= \sin a, \end{aligned}\right.$$

et

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\alpha_1 &= -\sin a \sin\varepsilon, \\ \cos\alpha_2 &= \sin a \cos\varepsilon, \end{aligned}\right.$$

qui lient les angles $\beta_1, \beta_2, \beta_3, a, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ d'une part, et les angles $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a, \varepsilon$ d'autre part.

En observant que la projection de S sur l'axe OZ est nulle, et en considérant chacune des trois projections de φ_n sur les trois axes OX, OY, OZ comme la somme des deux projections de S et de S_1 respectivement sur les mêmes trois axes OX, OY, OZ, nous obtiendrons les équations suivantes :

$$(6)\qquad \begin{cases} \varphi_n \cos\delta_1 = S\cos\varepsilon + S_1\cos\alpha_1, \\ \varphi_n \cos\delta_2 = S\sin\varepsilon + S_1\cos\alpha_2, \\ \varphi_n \cos\delta_3 = S_1\cos\alpha_3 = S_1\cos a, \end{cases}$$

qui servent à déterminer les angles δ_1, δ_2, δ_3. De ces équations (6), on tire

$$(7)\qquad \begin{cases} \cos\delta_1 = \dfrac{S\cos\varepsilon + S_1\cos\alpha_1}{\varphi_n} = \dfrac{S\cos\varepsilon - S_1\sin a\sin\varepsilon}{\varphi_n}, \\ \cos\delta_2 = \dfrac{S\sin\varepsilon + S_1\cos\alpha_2}{\varphi_n} = \dfrac{S\sin\varepsilon + S_1\sin a\cos\varepsilon}{\varphi_n}, \\ \cos\delta_3 = \dfrac{S_1\cos a}{\varphi_n} = \dfrac{S_1\omega r}{\varphi_n\sqrt{\omega^2 r^2 + L^2}}. \end{cases}$$

Tout cela posé, il est facile d'obtenir l'expression de l'accélération normale pour le cas le plus général. En effet, comme S est égal à

$$(8)\qquad S = X\frac{x}{d} + Y\frac{y}{d},$$

il ne reste qu'à déterminer S_1.

En considérant la projection de l'accélération totale φ sur l'axe OZ comme la somme des deux projections de φ_n et de φ_t sur le même axe OZ, nous aurons

$$(9)\qquad \varphi_n\cos\delta_3 + \varphi_t\cos\beta_3 = Z.$$

Or, $\varphi_n\cos\delta_3 = S_1\cos a$, $\cos\beta_3 = \sin a$, l'égalité (9) donnera

$$(10)\qquad S_1\cos a = Z - \sin a\,\varphi_t.$$

Ayant égard à ce que l'accélération tangentielle φ_t est égale à

$$(11) \qquad \varphi_t = X\cos\beta_1 + Y\cos\beta_2 + Z\cos\beta_3,$$

et, en substituant dans l'égalité (10) cette valeur φ_t, et les valeurs $\cos\beta_1$, $\cos\beta_2$, $\cos\beta_3$, données par les formules (4), nous obtiendrons, toutes réductions faites,

$$(12) \qquad S_1 = Z\cos a - W\sin a,$$

où la quantité W, étant la projection de X et de Y sur la tangente MF_1, est égale à

$$(13) \qquad W = X\cos\gamma_1 + Y\cos\gamma_2.$$

Si l'on compare nos formules (2), (8) et (12) avec les formules de M. H. Resal (9), (10), et celle qu'on lit à la dernière ligne de la page 239 de son Mémoire cité, on conclura que M. H. Resal pose $S_1 = Z\cos a$. Or il est évident que cette dernière égalité aura lieu dans le seul cas où le point A se trouve sur la droite ME, c'est-à-dire où l'accélération totale φ, représentée par MC, rencontre DB parallèle à AC, et, par conséquent, rencontre aussi l'axe instantané OZ. C'est ce qu'il fallait démontrer.

D'après nos formules (7), il est facile de voir comment il faut corriger les formules données par M. H. Resal pour $\cos\delta_1$, $\cos\delta_2$, $\cos\delta_3$, qu'il désigne respectivement par $\cos(\rho, x)$, $\cos(\rho, y)$, $\cos(\rho, z)$. De plus, il est à observer que S_1 (12) se réduit à Z dans le cas du mouvement autour d'un point fixe; car $\sin a$, étant multiplicateur de W, est proportionnel à la vitesse L, qui est nulle dans ce cas particulier; alors le radical $\sqrt{S^2 + S_1^2}$ se réduit à $\sqrt{S^2 + Z^2}$, qui, comme l'on sait, exprime l'accélération normale dans le cas de la rotation autour d'un centre fixe.

M. Schell, dans son savant Ouvrage : *Theorie der Bewegung und der Kräfte* (p. 420-421), détermine l'accélération normale, mais obtient pour cette accélération une expression incorrecte, par la seule raison qu'il commet une erreur, ou plutôt un *erratum*, qui consiste dans la fausseté de l'égalité suivante :

$$W\cos\left(\frac{\pi}{2}+tt'\right)=-W\cos(tt').$$

En introduisant cette erreur dans la détermination de S_1, il obtient pour φ_n une expression qui ne se réduit pas à l'expression de l'accélération normale dans le cas du mouvement autour d'un point fixe; car, $\cos(tt')$ étant proportionnel à ωr, le membre multiplié par W, dans l'expression générale de φ_n donnée par M. Schell, ne s'évanouit pas, tandis que $-\sin(tt')$, qui est égal à $\cos\left(\frac{\pi}{2}+tt'\right)$, est proportionnel à la vitesse de glissement, et cette vitesse est nulle dans le cas du mouvement autour d'un point fixe; par conséquent, en ajoutant le produit $-W\sin(tt')$ à telle partie de l'accélération S_1 qui forme la projection de Z sur la direction du même S_1 et qui est égale à $Z\cos a$, nous aurons pour S_1 l'expression qui, comme nous venons de le voir dans le cas du mouvement autour d'un point fixe, se réduit simplement à Z.

Il est juste d'ajouter ici encore la remarque suivante : M. Schell, pour le cosinus de l'angle que forme l'accélération normale avec l'axe instantané, et qu'il désigne par μ, donne (p. 421) l'expression

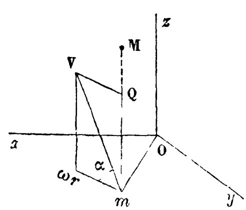
$$\cos\mu=\frac{T\sin\alpha}{\sqrt{r^2\omega^2+T^2}},$$

qui contient une erreur analogue à celle qui se trouve dans la formule de M. H. Resal pour $\cos(\rho, z)$ (p. 241). En effet, M. Schell, dans l'expression que nous venons de citer, représente par T la vitesse de glissement et par α l'angle dont la tangente est égale à $\frac{S_1}{S}$, et dont le sinus, par conséquent, est égal à $\frac{S_1}{\sqrt{S^2+S_1^2}} = \frac{S_1}{\varphi_n}$; de sorte que, d'après M. Schell, $\cos\mu = \frac{S_1}{\varphi_n}\,\frac{T}{\sqrt{\omega^2 r^2 + T^2}}$, tandis que, réellement, d'après la troisième de nos formules (7),

$$\cos\mu = \frac{S_1}{\varphi_n}\,\frac{\omega r}{\sqrt{r^2\omega^2 + T^2}}.$$

Note de M. Resal. — L'erreur signalee par M. Sabinine dans l'expression generale de l'acceleration normale d'un point d'un système invariable, que j'ai donnee autrefois dans le *Journal de l'École Polytechnique*, est tout a fait materielle et peut se reparer immediatement sans calcul.

Fig. 2.



Soient (*fig.* 2)

m la projection du point M d'un système invariable,

r la distance Om,

ω, Q la rotation instantanée et la vitesse de glissement,

V la vitesse de M ou la resultante de Q et de ωr,

X, Y, Z les composantes de l'acceleration de ce point parallèles aux axes,

a l'angle de V avec ωr.

Suivant r, on a l'accelération

$$X\frac{x}{r} + Y\frac{y}{r}$$

qui est normale à V.

L'accélération Z donne

$$Z\cos a$$

perpendiculaire à V dans le plan de ωr et de Q.

Mais, suivant ωr, on a aussi l'accélération

$$Y\frac{x}{r} - X\frac{y}{r},$$

qui donne suivant $Z\cos a$ la composante

$$\left(Y\frac{x}{r} - X\frac{y}{r}\right)\sin a,$$

et c'est précisément celle qui a été omise; de sorte que l'on a

$$Z\cos a - \left(Y\frac{x}{r} - X\frac{y}{r}\right)\sin a,$$

au lieu de $Z\cos a$.

Mais cette omission ne touche pas à la partie principale du Mémoire, qui avait surtout pour objet de déterminer la forme des fonctions X, Y, Z.