NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. BELLAVITIS

Exposition de la méthode des équipollences

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 241-257

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__241_0>

EXPOSITION DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES

(suite, voir même tome, p. 193);

PAR M. G. BELLAVITIS.

(Traduit de l'italien par M. LAISANT, capitaine du Génie.)

DEUXIÈME PARTIE.

APPLICATIONS DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES A LA SOLUTION GRAPHIQUE DE QUELQUES PROBLÈMES.

Procédés généraux.

61. En étudiant avec attention les treize règles ci-dessus, y compris le principe fondamental (10, 18, 19, 20, 23, 46, 50,..., 57) et la manière (44) d'exprimer que trois points sont en ligne droite, on reconnaîtra, je l'espère, toute la facilité avec laquelle découlent les conséquences des quelques principes qui constituent la méthode des équipollences. Ces conséquences comprennent toutes les propositions de la Géométrie plane; pour en développer les démonstrations, le calcul suffira, sans qu'il soit besoin d'aucune considération géométrique. On peut en dire autant de la méthode des coordonnées; mais celle-ci emploie des procédés plus artificiels, tandis que la méthode des équipollences représente chaque droite au moyen de sa grandeur et de son inclinaison; pour représenter un point, deux coordonnées sont nécessaires, au lieu qu'une équipollence suffit à cela.

Une des conséquences de cette différence essentielle entre les deux méthodes consiste en ce que les solutions graphiques des problèmes, dues à la méthode des coordonnées, sont le plus souvent fort longues ; les solutions que nous offrent les équipollences le disputent, au contraire, en élégance comme en simplicité, à celles fournies par la voie indirecte de la synthèse géométrique.

62. Nous allons indiquer la marche générale à suivre pour trouver la solution graphique d'un problème ; ceci sera du reste éclairci par quelques exemples.

On exprime toutes les conditions du problème au moyen d'équipollences entre les parties connues et les parties inconnues de la figure, en cherchant à réduire ces dernières au plus petit nombre possible. Si l'on arrive à obtenir une équipollence, avec un seul point inconnu, elle se résoudra à la manière des équations ; alors, conformément aux définitions établies (6, 16, 17), on construira la formule de résolution. Aux n^os 40 et 47, nous avons déjà donné deux exemples de cette manière de procéder.

63. Les conditions ne seront pas toujours réductibles à une telle simplicité ; parmi elles figureront souvent des expressions de coefficients inconnus, ou d'angles inconnus, représentés par le ramun, élevé à une puissance inconnue. En pareil cas, il faudra recourir à l'élimination ; et chacun sait quelle part appartient à la sagacité du calculateur, lorsqu'il s'agit d'en rendre les résultats aussi simples que possible.

Il convient d'observer qu'une équipollence suffit à déterminer deux inconnues, grandeurs ou inclinaisons ; en employant sa conjuguée (46), il serait possible d'éliminer l'une des inconnues ; mais on pourra fréquemment s'en dispenser, comme nous nous réservons de le mieux faire voir sur des exemples. Pour l'instant, nous le donnons seulement à entendre d'une façon générale.

64. Soient z, y deux grandeurs, et u, v deux inclinaisons inconnues. Si l'équipollence finale est de la forme (40)

$$z\varepsilon^{u}\mathrm{AB} \bumpeq \mathrm{CD},$$

où AB, CD soient deux droites que l'on sache construire, on aura

$$z\varepsilon^{u} \bumpeq \mathrm{CD} : \mathrm{AB},$$

équipollence qui, par rapport à l'unité de longueur adoptée et à l'origine des inclinaisons, nous fournira les valeurs numériques de z et de u.

65. Si l'équipollence finale est au contraire de la forme

$$z\mathrm{AB} + y\mathrm{CD} \bumpeq \mathrm{OU},$$

en la comparant terme à terme avec l'identité

$$\mathrm{OV} + \mathrm{VU} \bumpeq \mathrm{OU},$$

on voit que, si l'on construit, sur la droite donnée OU, un triangle dont un côté OV ait la même inclinaison que la droite AB, et l'autre VU la même inclinaison que CD, z et y seront les rapports numériques OV : AB et VU : CD; l'un et l'autre se trouveront par conséquent déterminés.

66. Semblablement l'équipollence

$$\varepsilon^{u}\mathrm{AB} + y\mathrm{CD} \bumpeq \mathrm{OU}$$

se résoudra en menant UV parallèle à CD, et en coupant cette droite par un arc de cercle de centre O et d'un rayon égal à AB; si bien que le côté OV du triangle OVU sera égal à AB, et que les deux inconnues seront déterminées par les équipollences

$$\varepsilon^{u} \bumpeq \mathrm{OV} : \mathrm{AB}, \quad y \bumpeq \mathrm{VU} : \mathrm{CD}.$$

67. Si, enfin, on a l'équipollence

$$\varepsilon^u AB + \varepsilon^v CD \triangleq OU,$$

en la comparant toujours avec

$$OV + VU \triangleq OU,$$

on sera conduit à construire sur OU un triangle dont les côtés OV, OU soient respectivement égaux à AB, CD, et l'on aura

$$\varepsilon^u \triangleq OV : AB, \quad \varepsilon^v \triangleq VU : CD.$$

68. On sera fréquemment conduit à une équipollence ne renfermant qu'une seule inconnue

$$\varepsilon^u AB + \varepsilon^{-u} CD \triangleq OU.$$

Au lieu de la résoudre à la manière des équations du second degré, on la traitera de préférence comme celle du numéro précédent, ε^u, ε^{-u} étant considérées comme deux inconnues distinctes.

Problèmes divers.

69. Problème. — *Construire un triangle* CBX (*fig.* 14), *connaissant la base* CB, *un angle adjacent* CBD *et une relation du premier degré*

$$BX = a + m\,CX$$

entre les longueurs des deux côtés CX, BX.

Puisque, dans la condition du problème, entre la grandeur de la droite inconnue CX, il y aura lieu de poser

$$CX \triangleq z\varepsilon^u,$$

il en résulte que cette condition sera

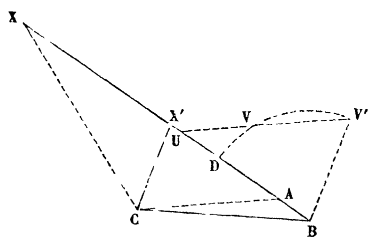
$$\text{gr.}\,BX = a + mz.$$

La direction de cette droite BX est connue, de sorte qu'en prenant BD égale à l'unité de longueur, nous aurons

$$BX \bumpeq (a + mz)BD.$$

Nous obtenons ainsi deux équipollences, ce qui est précisément nécessaire pour déterminer le point X et les

Fig. 14.



deux inconnues z, u. Au moyen de la règle I, on élimine rapidement le point X, et l'on a l'équipollence

$$CX - CB \bumpeq z\varepsilon^u - CB \bumpeq (a + mz)BD.$$

Elle est en réalité de forme trinôme, puisque les deux termes connus peuvent être réunis ensemble; divisée par z, elle prend la forme remarquée au n° 66

$$\varepsilon^u - \frac{1}{z}(CB + aBD) \bumpeq mBD,$$

et par suite le problème se résout au moyen d'une facile construction de triangle.

Prenant $BA \bumpeq aBD$, $BU \bumpeq mBD$, l'équipollence deviendra

$$\varepsilon^u - \frac{1}{z}CA \bumpeq BU.$$

Comparée terme à terme avec l'identité

$$BV - UV \triangleq BU,$$

elle nous montre qu'il faut mener UV parallèle à CA, et couper cette droite en V par le cercle de centre B et de rayon BD ; la droite CX parallèle à BV satisfait à la condition donnée

$$BX = BA + m\,CX \quad \text{ou} \quad AX = m\,CX.$$

Il serait possible d'abréger un peu cette construction.

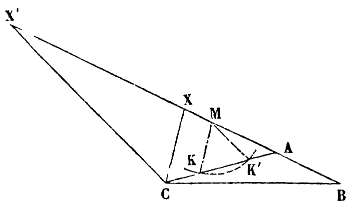
ADDITION DU TRADUCTEUR AU N° 69.

Soit (*fig.* 14 *bis*) $BA = a$, cette longueur étant portée sur la direction BX. Posons encore

(1) $$CX \triangleq z\varepsilon^{u}.$$

Construisons, à la suite de BA, la longueur AM, telle que son rapport

14 *bis*.



à l'unité de longueur soit égal à m. On aura

$$\text{gr.}\,AX = \text{gr.}(m\,CX) = mz = z\,\text{gr.}\,AM ;$$

et, par conséquent,

(2) $$AX \triangleq z\,AM.$$

Retranchant (1) de (2),

(3) $$AC \triangleq z(AM - \varepsilon^{u}).$$

Si, du point M comme centre, nous coupons AC en K par un arc de rayon $MK = 1$, nous aurons

(4) $$AC \triangleq z(AM - KM) \triangleq z\,AK.$$

La comparaison des équipollences (3) et (4) nous donne $\mathrm{KM} \mathrel{\underline{\triangle}} \varepsilon^{u}$, c'est-à-dire que CX sera parallèle à KM. Dans le cas de la figure, il y a deux solutions.

La valeur de z est, comme on voit, $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AK}}$, de sorte que l'on aura

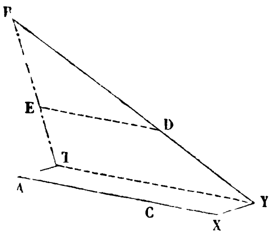
$$\frac{\mathrm{CX}}{\mathrm{KM}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AK}}.$$

Cela résulte évidemment de la similitude des triangles.

On peut remarquer que les grandeurs de CX, CX′ sont, d'après cela, inversement proportionnelles à celles de AK, AK′.

70. Problème. — *Deux points mobiles partant au même instant de* A, B (*fig.* 15) *parcourent avec des vi-*

Fig. 15.



tesses AC, BD *les droites* AX, BY. *On demande où a lieu leur plus grand rapprochement* XY.

Après le temps t, les points se trouvant en X, Y, on aura

$$\mathrm{AX} \mathrel{\underline{\triangle}} t\,\mathrm{AC}, \quad \mathrm{BY} \mathrel{\underline{\triangle}} t\,\mathrm{BD}.$$

Mais, d'après la règle I,

$$\mathrm{XY} \mathrel{\underline{\triangle}} \mathrm{AB} + \mathrm{BY} - \mathrm{AX} \mathrel{\underline{\triangle}} \mathrm{AB} + t(\mathrm{BD} - \mathrm{AC}).$$

De là, DE étant menée équipollente à CA, on tire

$$\mathrm{XY} \mathrel{\underline{\triangle}} \mathrm{AB} + t\,\mathrm{BE} \mathrel{\underline{\triangle}} \mathrm{AT}.$$

Or, de tous les points de la droite BE, le plus voisin du point A n'est autre que le pied de la perpendiculaire AT;

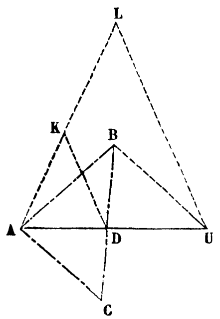
la droite cherchée XY sera donc équipollente à cette perpendiculaire AT, et on la construira en menant TY parallèle à AC.

71. Cette solution conviendrait encore si les droites AC, BD n'étaient pas situées dans un même plan, les trois premières règles s'appliquant aussi à l'espace.

Du reste, il était facile de la trouver par la considération des mouvements relatifs, parce que, dans la méthode des équipollences, ce que nous appelons *composition des droites* (5) correspond pleinement à la composition des mouvements.

72. Problème. — *Construire un triangle connaissant deux de ses côtés* AB, AC (*fig.* 16) *et la bissectrice* AD *de l'angle qu'ils forment, limitée au côté opposé.*

Fig. 16.



Prenant AD pour origine des inclinaisons (13), nous désignerons par u l'angle inconnu CAD = DAB, en sorte que

$$\mathrm{AB} \bumpeq c\varepsilon^{u}, \quad \mathrm{AC} \bumpeq b\varepsilon^{u},$$

c et b étant les longueurs données de ces côtés.

La condition que CD, DB forment une seule droite est exprimée par

$$\mathrm{CD} \triangleq p\,\mathrm{DB},$$

ou

$$\mathrm{AD} - b\varepsilon^{-u} \triangleq p(c\varepsilon^{u} - \mathrm{AD}).$$

Entre cette équipollence et sa conjuguée

$$\mathrm{cj.AD} - b\varepsilon^{u} \triangleq p(c\varepsilon^{-u} - \mathrm{cj.AD})$$

(dans laquelle nous remarquerons que AD, ayant une inclinaison nulle, ne diffère pas de sa propre conjuguée), nous éliminerons le coefficient numérique p, et nous aurons

$$bc\varepsilon^{2u} - (b+c)\varepsilon^{u}\mathrm{AD} + (\mathrm{AD})^2 \triangleq bc\varepsilon^{-2u} - (b+c)\varepsilon^{-u}\mathrm{AD} + (\mathrm{AD})^2.$$

Cette équipollence est du quatrième degré par rapport à l'inconnue ε^u; elle admet les deux solutions $\varepsilon^u \triangleq \pm 1$ pour lesquelles le triangle se réduirait à une seule droite.

Nous la diviserons donc par $\varepsilon^u - \varepsilon^{-u}$, et nous obtiendrons l'équipollence trinôme

$$c\varepsilon^{u} + c\varepsilon^{-u} \triangleq \frac{b+c}{b}\,\mathrm{AD},$$

laquelle, comparée terme à terme (68) avec

$$\mathrm{AB} + \mathrm{BU} \triangleq \mathrm{AU},$$

nous montre qu'on est conduit à construire le triangle AUB, dans lequel nous connaissons le côté

$$\mathrm{AU} \triangleq \frac{b+c}{b}\,\mathrm{AD},$$

et les longueurs c des côtés AB, BU, dont les inclinaisons u, $-u$ sont inconnues. Pour déterminer AU, nous prendrons sur la droite quelconque AKL les longueurs $\mathrm{AK} = b$,

$KL = c$, d'où il suit que

$$LU \triangleq AU - AL \triangleq \frac{b+c}{b}(AD - AK) \triangleq \frac{b+c}{b} KD$$

sera parallèle à KD.

La droite AC, égale à b et parallèle à BU, complétera le triangle cherché ABC.

Cette solution est plus directe que celle donnée par Lamé, en 1818, dans son excellent *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie*, p. 15.

73. En substituant la valeur trouvée

$$\varepsilon^u + \varepsilon^{-u} \triangleq (b + c)\, AD : bc$$

dans la somme de la première équipollence et de sa conjuguée, on trouve

$$p = b : c.$$

D'où l'on conclut que la bissectrice d'un angle d'un triangle divise le côté opposé en segments proportionnels aux côtés adjacents. Ce théorème peut s'obtenir plus rapidement de la manière suivante :

La condition que AD soit bissectrice de l'angle CAB est exprimée (16) par

$$(AD)^2 \triangleq n\, AB . AC,$$

n étant un nouveau coefficient numérique; et la condition que D appartienne à la droite CB (44) par l'équipollence

$$p\, AB - (1 + p)\, AD + AC \triangleq 0,$$

laquelle résulte (10) de $CD \triangleq p\, DB$.

Éliminant AD, on obtient

$$n(1 + p)^2 AB . AC \triangleq p^2 AB^2 + AC^2 + 2p\, AB . AC,$$

qui se réduit aisément à une équation trinôme, et nous donne, d'après la règle IV,

$$p\,\mathrm{gr.}\,AB = \mathrm{gr.}\,AC.$$

ADDITION DU TRADUCTEUR AU N° 73.

On peut encore démontrer simplement le théorème en question de la manière suivante :

On a

$$(1) \qquad AB \triangleq AD + DB$$

et

$$AC \triangleq AD - CD.$$

Posons

$$\frac{\mathrm{gr.}\,CD}{\mathrm{gr.}\,DB} = p,$$

et prenons AD pour origine des inclinaisons. AC sera exprimée par $\frac{b}{c}\,\mathrm{cj.}\,AB$, puisque AD est bissectrice de BAC; et nous aurons

$$\frac{b}{c}\,\mathrm{cj.}\,AB \triangleq AD - pDB.$$

Multipliant par $\frac{c}{b}$,

$$(2) \qquad \mathrm{cj.}\,AB \triangleq \frac{c}{b}AD - \frac{pc}{b}DB.$$

Ajoutons (1) et (2),

$$AB + \mathrm{cj.}\,AB \triangleq \left(1 + \frac{c}{b}\right)AD + \left(1 - \frac{pc}{b}\right)DB.$$

Le premier membre (règle X) et le terme $\left(1 + \frac{c}{b}\right)AD$ ont une inclinaison nulle. Donc (règle II)

$$1 - \frac{pc}{b} = 0, \quad p = \frac{b}{c},$$

ou

$$\frac{\mathrm{gr.}\,CD}{\mathrm{gr.}\,DB} = \frac{\mathrm{gr.}\,AC}{\mathrm{gr.}\,AB}.$$

Une démonstration analogue s'applique à la bissectrice AD′ de l'angle adjacent. On aura

$$AB \triangleq AD' + D'B,$$

$$AC \triangleq AD' + D'C,$$

ou

$$\frac{b}{c}\,\mathrm{cj.AB} \mathrel{\triangle} \mathrm{AD'} + p'\mathrm{D'B}.$$

De là

$$\mathrm{cj.AB} \mathrel{\triangle} \frac{c}{b}\,\mathrm{AD'} + \frac{c}{b}\,p'\mathrm{D'B};$$

et, par soustraction,

$$\mathrm{AB} - \mathrm{cj.AB} \mathrel{\triangle} \left(1 - \frac{c}{b}\right)\mathrm{AD'} + \left(1 - p'\frac{c}{b}\right)\mathrm{D'B}.$$

Le premier membre (règle XI) et le terme $\left(1 - \frac{c}{b}\right)\mathrm{AD'}$ ayant une inclinaison de 1 droit, on a (règle II)

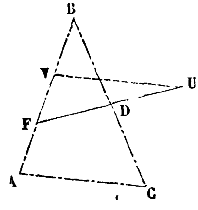
$$1 - p'\frac{c}{b} = 0, \quad p' = \frac{b}{c},$$

$$\frac{\mathrm{gr.\,D'B}}{\mathrm{gr.\,D'C}} = \frac{\mathrm{gr.\,AB}}{\mathrm{gr.\,AC}}.$$

74. Problème. — *Construire un triangle, connaissant les longueurs de deux côtés, et les positions de deux points coupant deux côtés dans des rapports donnés.*

Ce facile problème nous permettra de constater une fois de plus comment, sans qu'il soit besoin d'aucune considération géométrique, et en traduisant seulement en équipollences les données du problème, on est con-

Fig. 17.



duit à la solution. Désignons par b, f, g la longueur du côté AC (*fig.* 17) et les deux segments de AB; par u, v, les inclinaisons de ces côtés AC, AB; par m le rapport dans lequel l'autre côté BC doit être coupé par le point donné D. Nous aurons les quatre équipollences

$$\mathrm{AC} \doteq b\varepsilon^{u},$$
$$\mathrm{AF} \doteq f\varepsilon^{v},$$
$$\mathrm{FB} \doteq g\varepsilon^{v},$$
$$\mathrm{DC} \doteq m\,\mathrm{BD},$$

qui suffiront à déterminer les trois points inconnus A, B, C et les deux inclinaisons u, v. Ces points s'éliminent aisément (10), et l'on obtient

$$b\varepsilon^{u} - f\varepsilon^{v} - \mathrm{FD} \doteq m\,(\mathrm{FD} - g\varepsilon^{v}),$$

équipollence qui prend immédiatement la forme trinôme

$$b\varepsilon^{u} + (mg - f)\,\varepsilon^{v} \doteq (m + 1)\,\mathrm{FD}.$$

La comparant terme à terme (67), avec

$$\mathrm{VU} + \mathrm{FV} \doteq \mathrm{FU},$$

on voit que, si l'on construit sur

$$\mathrm{FU} \doteq (m + 1)\,\mathrm{FD},$$

le triangle FVU avec les côtés FV, VU respectivement égaux à $mg - f$ et à b, ils seront par cela même parallèles aux côtés cherchés AB, AC.

75. Problème. — *Construire un triangle* AXY (*fig.* 18), *semblable à un triangle donné, et dont les sommets soient à des distances données d'un point* O (Carnot, *Géométrie de position*, § 328; Lamé, *Exposition, etc.*, p. 81).

J'abrége, à titre d'exercice, les calculs qui conduisent facilement à la solution.

On a

$$OX \triangleq f\varepsilon^u,$$
$$OY \triangleq g\varepsilon^v,$$
$$AY \triangleq n\varepsilon^\alpha\, AX,$$

où le rapport n et l'angle α sont connus. Il en résulte

$$g\varepsilon^v - OA \triangleq n\varepsilon^\alpha (f\varepsilon^u - OA),$$

ou

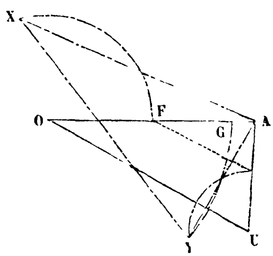
$$g\varepsilon^v - nf\varepsilon^{\alpha+u} \triangleq (1 - n\varepsilon^\alpha)\, OA,$$

que l'on comparera avec $OY - UY \triangleq OU$, en posant

$$AU \triangleq n\varepsilon^\alpha\, AO.$$

Cette droite AU se construira donc en formant le

Fig. 18.



triangle AOU, semblable à celui auquel AXY doit être semblable lui-même. Puis on fera

$$\text{gr.}\, OY = g,$$
$$\text{gr.}\, UY = nf = n\,\text{gr.}\, OF = \text{gr.}\, ON.$$

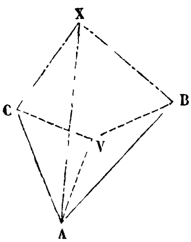
76. Problème. — *Déterminer le point* X, *d'où l'on voit sous des angles donnés les côtés du triangle* ABC (*fig.* 19 .

Les conditions du problème sont exprimées par

$$BX \triangleq y\varepsilon^{\gamma}\, AX,$$
$$CX \triangleq z\varepsilon^{-\beta}\, AX.$$

γ et β étant les angles donnés AXB, CXA.

Fig. 19.



Comme d'habitude, la règle I nous donne

$$AX \triangleq AB + y\varepsilon^{\gamma}\, AX \triangleq AC + z\varepsilon^{-\beta}\, AX,$$

et, en éliminant AX,

$$z\varepsilon^{-\beta}\, AB - y\varepsilon^{\gamma}\, AC \triangleq AB - AC \triangleq CB.$$

Cette équipollence, comparée (65) à

$$VB - VC \triangleq CB,$$

nous conduit à former les angles ABV, ACV, égaux aux angles donnés AXC, AXB; après quoi l'on aura

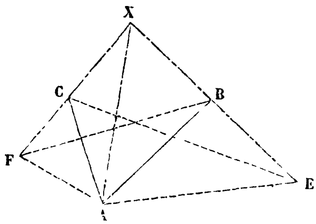
$$VB : AB \triangleq z\varepsilon^{-\beta} \triangleq CX : AX,$$

en sorte qu'on est ramené à construire le triangle ACX directement semblable à AVB.

77. Cette solution, tout à fait différente de celle que l'on obtiendrait par l'intersection des deux circonférences ABX, ACX, et présentant plus de simplicité, nous montre

comment l'étude des équipollences peut conduire, même dans des questions absolument élémentaires, à des résultats nouveaux.

Fig. 20.



Pour faire ressortir la fécondité de la méthode, cherchons une autre solution. Soit (*fig.* 20)

$$AX \triangleq x\varepsilon^{u}.$$

Des équipollences

$$x\varepsilon^{u} \triangleq AB + yx\varepsilon^{u+\gamma} \triangleq AC + zx\varepsilon^{u-\beta},$$

nous nous proposons d'éliminer x, y, z.

La première, divisée par $\varepsilon^{u+\gamma}$, puis retranchée de sa conjuguée, donne

$$x(\varepsilon^{\gamma} - \varepsilon^{-\gamma}) \triangleq \varepsilon^{u+\gamma}\,\text{cj}.AB - \varepsilon^{-u-\gamma}AB.$$

On trouve pareillement

$$x(\varepsilon^{\beta} - \varepsilon^{-\beta}) \triangleq \varepsilon^{-u+\beta}AC - \varepsilon^{u-\beta}\,\text{cj}.AC.$$

De là

$$[\varepsilon^{\gamma}(\varepsilon^{\beta} - \varepsilon^{-\beta})\,\text{cj}.AB + \varepsilon^{-\beta}(\varepsilon^{\gamma} - \varepsilon^{-\gamma})\,\text{cj}.AC]\,\varepsilon^{u}$$
$$\triangleq [\varepsilon^{-\gamma}(\varepsilon^{\beta} - \varepsilon^{-\beta})AB + \varepsilon^{\beta}(\varepsilon^{\gamma} - \varepsilon^{-\gamma})AC]\,\varepsilon^{-u}.$$

Pour construire cette équipollence, il conviendra de la diviser par $\varepsilon^{\beta} - \varepsilon^{-\beta}$, et de poser

$$\frac{\varepsilon^{\gamma} - \varepsilon^{-\gamma}}{\varepsilon^{\beta} - \varepsilon^{-\beta}}\,\varepsilon^{\beta+\gamma}AC \triangleq EA,$$

si bien qu'elle se réduira de la sorte à

$$\varepsilon^{u+\gamma}\,\mathrm{cj.EB} \bumpeq \varepsilon^{-u-\gamma}\,\mathrm{cj.EB}.$$

Or, lorsqu'une expression est équipollente à sa propre conjuguée (45), l'une et l'autre ont une inclinaison nulle. Donc EB a pour inclinaison $u+\gamma$, et par suite est parallèle à $\mathrm{BX} \bumpeq yx\varepsilon^{u+\gamma}$.

Grâce aux principes de trigonométrie que nous exposerons plus loin, il devient évident que le point E se construira en faisant l'angle EAC supplémentaire de l'angle donné $\mathrm{CXB} = \beta+\gamma$; puis $\mathrm{ACE} = \mathrm{AXB} = \gamma$. La droite EB passera par le point cherché. Si pareillement BAF est supplémentaire de $\mathrm{FBA} = \mathrm{CXA}$, la droite FC passera par le même point X.

Il n'est pas sans intérêt de remarquer l'analogie des *fig.* 6, 8, 19, 20, auxquelles correspondent les nos 29, 35, 38,..., 41, 76, 77.

(*A suivre.*)