Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 231-236

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__231_1>

CORRESPONDANCE.

Nous avons reçu de M. Ph. Gilbert, professeur à l'Université de Louvain, un *Mémoire sur l'existence de la dérivée dans les fonctions continues*, où l'auteur critique un Mémoire de M. Hankel, professeur à l'Université de Tubingue, qui admet l'existence de fonctions continues n'ayant pas de dérivée. M. Darboux a récemment communiqué à ce sujet, à la Société mathématique de France, une Note *Sur les intégrales des fonctions discontinues et sur les fonctions continues qui n'ont pas de dérivées*. Nous y reviendrons.

M. Bourguet, de Nantes, nous fait remarquer que la proposition qui fait l'objet de la question 1109 n'est pas entièrement exacte, comme le prouve du reste l'élégante démonstration de M. Poujade. Les points d'intersection des diamètres des paraboles, relatifs aux points de contact, avec les côtés du triangle, sont sur trois droites issues des trois sommets et concourantes, *ou bien sont trois points en ligne droite.*

M. Bourguet nous communique en outre, à propos de la question 1086, cette proposition d'un de ses élèves :

« Lorsque deux coniques ont un foyer commun, le quadrilatère formé par les quatre tangentes qui ont pour corde des contacts la ligne des deux foyers non communs jouit des propriétés suivantes :

» 1° La droite qui passe par le milieu des diagonales coupe perpendiculairement, et en son milieu, la droite des foyers non communs; 2° les distances des sommets du quadrilatère à la même droite sont égales à la somme et à la différence des demi-axes focaux des coniques. »

M. B. Niewenglowski, professeur au lycée de Clermont-Ferrand, m'a envoyé une *Note sur la discussion du cas des triangles sphériques, dans lequel les données sont a, b, A.* L'auteur prétend que l'on s'est jusqu'ici universellement trompé dans cette discussion, et, parmi les ouvrages incriminés, il cite le *Traité de Trigonométrie* de M. J.-A. Serret.

Or, en me reportant à la page 191 de ce *Traité, le seul que je possède,* j'y lis :

« Il faut, pour que le problème soit possible, que $\frac{\sin b \sin A}{\sin a}$ soit moindre que 1; si cette condition est remplie, il y a deux valeurs de B qui satisfont à l'équation $\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}$: l'une M est plus petite que 90°, l'autre M' est égale à 180° — M.

» Pour que l'une de ces valeurs de B réponde à la question, il faut et il suffit (n° 149) que A — B et $a - b$ aient le même signe. Ainsi la condition pour que M réponde à la question est que $A - M$ soit de même signe que $a - b$; de même la condition pour que M' y réponde est que $A - M'$ soit de même signe que $a - b$. »

Suit une discussion où M. Serret examine les différents cas où M et M' répondent à la question. Or il est bien clair qu'il faudrait être dénué de sens commun pour aller discuter sur M et M', dans le cas où ils n'existeraient pas. Or c'est précisément ce dont M. Niewenglowski accuse tous les auteurs, y compris M. Serret, ainsi qu'on en pourra juger par la réponse suivante qu'il a faite à mes observations :

« Vous me dites que, dans le tableau de discussion du problème en question, les auteurs que je critique ont supposé que, *bien entendu*, la condition

$$\frac{\sin A \sin b}{\sin a} \leq 1$$

est vérifiée. Eh bien! cette explication n'est pas soutenable. Soyons francs. Supposez que la discussion donnée par M. Gerono, votre *collaborateur*, pour lequel j'ai d'ailleurs une profonde estime, ne soit pas une de celles que je conteste, n'auriez-vous pas accepté ma Note? Eh bien! ouvrons le *Traité de Trigonométrie* de M. Serret, p. 191 et 192 (4e édition), par exemple :

« 1° Si a est $< b$, la formule $\sin B = \dfrac{\sin b \sin A}{\sin a}$ donne » $M > A$, et, à plus forte raison, $M' > A$; *il y a donc* » *deux solutions*, etc. »

» Donc, pour former le tableau de la page 193, *on tient compte de la formule* $\sin B = \dfrac{\sin b \sin A}{\sin a}$, et il est impossible que, quand je lis : si l'on a $A < 90°$, $b < 90°$, $a < b$, il y a deux solutions, je n'en conclue, en toute confiance, qu'il y aura toujours deux solutions, si ces conditions sont vérifiées.

» Discuter un problème, c'est, pour tout le monde, indiquer le moyen de reconnaître *a priori* sur les données si le problème est possible, et combien il a, suivant les cas, de solutions. Je maintiens donc mon dire, et je vous serais reconnaissant si vous vouliez bien insérer ma Note. Si vous persistez à me croire dans l'erreur, qui vous empêche de faire des réserves? Mais, encore un coup, il y aurait donc dans le tableau de la p. 193 des résultats toujours vrais, comme, par exemple,

$A > 90^\circ$, $b < 90^\circ$, $a > b$ et $a + b \leq 180^\circ$ une solution,

et d'autres vrais seulement quelquefois, conditionnellement. Quand j'aurai le temps, j'enverrai ma Note à M. Serret. Si vous le voyez, ayez la bonté de lui en parler; je suis sûr qu'il changera cette discussion dans une édition subséquente. En tout cas, avouez que la solution que je vous ai envoyée est plus claire, sinon plus exacte. »

M. Niewenglowski se trompe encore sur ce point. La solution qu'il m'a envoyée est, en effet, une solution absolument géométrique, et ce qu'il y a à faire, au point de vue trigonométrique, est précisément de déduire des formules, et des formules seules, tous les résultats qu'on peut obtenir géométriquement.

Enfin cette discussion n'eût jamais vu le jour, sans la dernière lettre que voici :

« Je vous demande pardon de revenir encore sur la discussion *du cas douteux*, mais voici un argument en faveur de mon opinion, que je crois péremptoire.

Si

$$A > 90^\circ,\quad b < 90^\circ,\quad a > b,\quad a + b \leq 180^\circ,$$

ces Messieurs disent : *aucune solution*.

» Ici vous ne pourrez pas m'objecter qu'ils supposent *a priori* que la condition $\sin B \leq 1$ est satisfaite, ou plutôt qu'elle ne l'est pas.

» Quand on annonce qu'il y a une solution par exemple, si je vous réponds qu'il n'y en a pas, vous m'objectez que l'on suppose, *bien entendu*,

$$\frac{\sin A \sin b}{\sin a} \leq 1.$$

Or ici j'admets parfaitement votre objection, *il est supposé que*

$$\frac{\sin A \sin b}{\sin a} \leq 1;$$

et ces Messieurs disent, dans le cas considéré : *aucune solution*.

» Or soient

$$A = 120^\circ, \quad a = 60^\circ, \quad b = 45^\circ,$$

on est bien dans le cas considéré.

» Or

$$\sin B = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3} \times \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

l'hypothèse est justifiée; donc $\sin B$ est réel,

$$B' = 45^\circ, \quad B'' = 135^\circ;$$

alors

$$a - b > 0, \quad 120^\circ - 45^\circ > 0, \quad 120^\circ - 135^\circ < 0;$$

donc il y a une solution.

» Je crois, Monsieur, que cette fois vous serez convaincu et que M. Gerono voudra bien reconnaître son erreur. Mon Dieu ! c'est pourtant si facile de se tromper, qu'il y a à mon avis beaucoup de gloire à reconnaître son erreur : *Errare humanum est, sed in errore perseverare diabolicum.*

» Prouvez-moi que je me trompe de nouveau, ou autrement je ne comprendrai pas pourquoi vous refusez d'insérer mon article. »

Il suffit d'ouvrir le *Traité de Trigonométrie* de M. Serret, à la page citée par l'auteur, pour y lire, dans le cas particulier considéré,

$$A > 90^\circ, \quad b < 90^\circ, \quad a > b \quad \text{et} \quad a + b \leq 180^\circ \text{ une solution;}$$

ce qui est exactement le contraire de ce qu'il y a lu.

Ch. B.