NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ABEL TRANSON

Sur le théorème de Dandelin

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 21-22

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__21_0>

SUR LE THÉORÈME DE DANDELIN;

PAR M. ABEL TRANSON.

Lorsqu'un plan coupe un cône de révolution, si une sphère est inscrite dans le cône de manière à toucher ce plan, le point de contact est l'un des foyers de la section, et la directrice correspondant à ce foyer est la droite de rencontre du plan sécant avec le plan de contact de la sphère et du cône. Tel est le beau théorème dû à MM. Quetelet et Dandelin.

Ce théorème a une extension bien connue. Si une autre sphère, inscrite aussi dans le cône, pénètre le plan sécant, la distance tangentielle d'un point de la section conique au cercle de pénétration est dans un rapport constant avec la distance de ce point à la droite de rencontre du plan sécant avec le plan de contact de la nouvelle sphère et du cône. Ce cercle de pénétration peut être appelé un *cercle focal*, et la droite dont il s'agit une *directrice* relative à ce cercle.

Mais si la sphère inscrite au cône ne touche ni ne pénètre le plan sécant, devient-elle étrangère à la conique, étrangère aux propriétés focales de la conique?... On va voir qu'il n'en est pas ainsi.

Lemme.— « Soit une sphère de rayon r, dont le centre C est à la distance a d'un plan donné; toutes les sphères qui ont leurs centres sur le plan et qui coupent orthogonalement la première se rencontrent en un même point placé sur la perpendiculaire abaissée du centre C et à une hauteur égale à $\sqrt{a^2-r^2}$; » proposition connue et d'ailleurs très-facile à démontrer.

Maintenant si l'on se représente une sphère inscrite au cône, mais ne touchant ni ne pénétrant le plan sécant, on montrera, précisément comme pour la sphère tangente ou pénétrante, que la portion d'arête du cône comprise entre le plan de contact et un point quelconque *m* de la section conique est dans un rapport constant avec la distance de ce point à la droite de rencontre des deux plans. D'ailleurs cette portion d'arête issue du point *m* est égale à la distance de ce même point à celui qu'on aura placé, selon la règle indiquée dans le lemme, sur la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur le plan sécant; car ces deux distances sont des rayons d'une même sphère dont le centre est *m*.

Ce point de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère est indépendant de la situation du point *m* sur le périmètre de la conique. C'est un véritable *foyer* qui a sa propre *directrice*.

On démontrera aussi, absolument comme dans le cas de deux sphères tangentes à une section elliptique, que si l'on considère les deux foyers relatifs à deux sphères non pénétrantes, *la somme* des deux rayons vecteurs est constante pour tous les points de l'ellipse si les deux sphères sont situées l'une au-dessus, l'autre au-dessous du plan sécant. Ce serait *la différence* si elles étaient du même côté. Dans le cas de la section hyperbolique, c'est toujours *la différence*, parce que les sphères non pénétrantes sont toujours d'un même côté du plan sécant.

On retrouve ainsi ces foyers extérieurs au plan de la conique, dont l'existence et les propriétés sont bien connues.