NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. DE SAINT-GERMAIN

Détermination des éléments infinitésimaux relatifs aux lignes à double courbure (suite et fin, voir même tome, p. 161)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 207-212

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__207_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS INFINITÉSIMAUX RELATIFS AUX LIGNES A DOUBLE COURBURE

(suite et fin, voir même tome, p. 161);

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

VIII. Nous allons établir plusieurs propriétés, et calculer quelques éléments qui se rapportent à l'arc infiniment petit OM, outre les théorèmes démontrés aux paragraphes IV et V. Nous supposerons que les valeurs de x, y, z aient été explicitées à l'aide du tableau précédent.

La différence entre l'arc OM et sa corde est

$$s - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = s - \sqrt{s^2 - \frac{1}{3}\frac{s^4}{R^2} + \ldots + \frac{1}{4}\frac{s^4}{R^2} + \ldots}$$
$$= \frac{s^3}{24 R^2} + \ldots;$$

elle a pour limite le cube de l'arc divisé par 24 fois le carré du rayon de courbure.

L'angle de la corde OM avec la tangente en O peut être mesuré par $\frac{y}{s} = \frac{s}{2R} + \ldots$; il est, à la limite, égal à la moitié de l'angle de contingence.

L'angle du plan des xy et du plan mené par la tangente en O et le point M a pour mesure $\lim \frac{z}{y} = \frac{s}{3r}$; il est le tiers de l'angle de torsion. Il en résulte que, si l'on considère la projection de la courbe sur le plan des yz, l'angle de la corde avec la tangente en O est le tiers et non la moitié de l'angle de contingence.

Les équations de la tangente en M peuvent s'écrire

$$\frac{X - s}{1 - \frac{s^2}{2R^2}} = \frac{Y - \frac{s^2}{2R} + \ldots}{\frac{s}{R} - \frac{s^2}{2R^2}\frac{dR}{ds}} = \frac{Z - \frac{s^3}{6Rr} + \ldots}{\frac{s^2}{2Rr} + \ldots}.$$

Sa plus courte distance à Ox a pour équations (I) à la limite

$$Y + \frac{s}{2r} Z = 0, \quad X = \frac{s}{2};$$

sa longueur est (I) $\frac{s^3}{12Rr}$; enfin son angle avec l'axe du plan osculateur est égal au demi-angle de torsion; ces théorèmes ont été énoncés par M. Ossian Bonnet.

La normale principale en M a pour équations

$$\frac{X - s}{-\frac{s}{R}} = Y - \frac{s^2}{2R} = \frac{Z - \frac{s^3}{6Rr}}{\frac{s}{r}};$$

on a

$$\cos\lambda = -\frac{s}{R}, \quad \cos\nu = \frac{s}{r};$$

les angles que cette normale fait avec les plans des yz et des xy sont complémentaires de λ et de ν, et égaux respectivement aux angles de contingence et de torsion. L'angle des normales en O et en M peut être mesuré par son sinus

$$\sin\mu = \sqrt{\cos^2\lambda + \cos^2\nu} = \frac{s}{Rr}\sqrt{R^2 + r^2}.$$

La perpendiculaire commune aux deux normales a pour équations

$$\frac{X}{R} - \frac{Z}{r} = 0, \quad Y = \frac{Rr^2}{R^2 + r^2},$$

et pour longueur $\frac{Rs}{\sqrt{R^2 + r^2}}$. Son angle Oz, égal à celui du plan osculateur et du plan parallèle aux deux normales, a pour tangente $\frac{r}{R}$. Les normales principales forment une surface gauche, sur laquelle le paramètre de distribution le long de la génératrice issue du point O est $\frac{R^2 + r^2}{R^2 r}$.

La courbe gauche a même cercle de courbure que sa projection sur le plan des xy; car dans chacune la distance du point infiniment voisin de O à la tangente en O et la longueur de l'arc compris ne diffèrent que de quantités négligeables. La distance de M à ce cercle est l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés le z du point M et la distance de sa projection au cercle, c'est-à-dire la puissance du point divisée par le diamètre. Cette distance est donc

$$\sqrt{z^2 + \frac{1}{4R^2}[x^2 + (y - R)^2 - R^2]^2} = \frac{s^3}{6R^2 r}\sqrt{R^2 + r^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2}.$$

IX. L'équation générale du plan normal est, en ordonnant,

$$X + (Y - R)\frac{s}{R} - \left(X + \frac{dR}{ds}Y - \frac{R}{r}Z\right)\frac{s^2}{2R^2} + \ldots = 0.$$

Le point de rencontre du plan normal en O et des deux infiniment voisins se détermine en annulant le terme indépendant de s, les coefficients de s et de s^2; il a pour coordonnées

$$x_1 = 0, \quad y_1 = R, \quad z_1 = r\frac{dR}{ds}.$$

C'est un point de l'arête de rebroussement (A) de la surface polaire enveloppe des plans normaux à la courbe donnée. Si de ce point comme centre on décrit une sphère passant en O, son rayon sera

$$\rho = \sqrt{R^2 + r^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2};$$

elle coupe le plan des xy suivant le cercle osculateur, et je dis qu'elle-même est osculatrice à la courbe, car elle passe à une distance infiniment petite du quatrième ordre du point M. En effet, cette distance est sensiblement égale à la puissance du point M relative à la sphère, divisée par son diamètre : c'est donc

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{1}{2\rho}\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2-\rho^2\right]\\ &= -\frac{1}{2\rho}\left(\frac{1}{12\mathrm{R}^2}+2\mathrm{R}\,b_4+2r\frac{d\mathrm{R}}{ds}c_4\right)s^4+\ldots\\ &= \left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{\mathrm{R}r}\frac{d\mathrm{R}}{ds}\frac{dr}{ds}+\frac{r}{\mathrm{R}}\frac{d^2\mathrm{R}}{ds^2}\right)\frac{s^4}{24\rho}=\frac{1}{24}\,\frac{\frac{d\rho}{ds}}{\frac{d\mathrm{R}}{ds}}\,\frac{s^4}{\mathrm{R}r^2}.\end{aligned}$$

X. Le rayon de la sphère osculatrice en un point quelconque aura la même expression, ou, en vertu de l'équation (10),

$$\rho^2=\mathrm{R}^2+r^2\left(\frac{d\mathrm{R}}{ds}\right)^2=\mathrm{R}^4\sum\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)^2-r^2.$$

L'examen de ce qui a lieu au point O montre, par une coïncidence géométrique des plus simples, que le centre de cette sphère a pour coordonnées

$$x_2=x+\mathrm{R}\cos\lambda+r\frac{d\mathrm{R}}{ds}\cos\xi,\ldots$$

Pour le point infiniment voisin de O, il est bien facile de trouver qu'en négligeant s^2 on a

$$x_2=0,\quad y_2=\mathrm{R}_0,\quad z_2=r_0\frac{d\mathrm{R}_0}{ds}+\frac{\rho_0}{r_0}\frac{d\rho_0}{d\mathrm{R}_0}s.$$

L'arc $\omega\mu$ de l'arête de rebroussement (A) correspondant à OM est donc tangent à l'axe du cercle osculateur, et a pour longueur

$$d\sigma=\frac{\rho_0}{r_0}\frac{d\rho_0}{d\mathrm{R}_0}s.$$

Si l'on rapproche cette valeur de celle que j'ai donnée pour δ, on retrouve la formule indiquée par M. Ruchonnet

$$\delta = \frac{s^3 d\sigma}{24 R r \rho}.$$

Les tangentes à l'arête (A) étant les axes des cercles osculateurs de la courbe donnée, l'angle de contingence de $\omega\mu$ égale l'angle de torsion de OM. En tenant compte des termes en s^2 dans les valeurs de x_2, y_2, z_2, on verrait que le plan osculateur de (A) en ω est le plan normal en O; mais cela résulte aussi de ce qu'il est parallèle aux axes des plans osculateurs en O et M, et que ces deux plans passent par la tangente OX. Il s'ensuit que l'angle de torsion de $\omega\mu$ est égal à l'angle des plans normaux en O et en M, ou à l'angle de contingence de OM. Les rayons de première et de deuxième courbure de (A) en ω sont respectivement

$$\rho \frac{d\rho}{dR}, \quad \frac{R\rho}{r} \frac{d\rho}{dR}.$$

J'ai cru devoir indiquer très-rapidement les résultats connus que j'ai rencontrés; mais on peut voir combien la méthode précédente est régulière et facile, et propre à l'étude de toutes les propriétés qui ne dépendent que des rayons de courbure des lignes de l'espace.