Nouvelles annales de mathématiques

G. Bellavitis

Exposition de la méthode des équipollences

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 193-207

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__193_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

EXPOSITION DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES

(Suite, voir même tome, p. 145);

PAR M. G. BELLAVITIS.

(Traduit de l'italien par M. LAISANT, capitaine du Génie.)

---

42. Faisons une rapide digression. Les relations trouvées entre m, x, y, z pourraient servir à démontrer que, avec l'involution précédente, on a aussi les trois autres

$$\mathrm{AF.DC.EB} \doteqdot \mathrm{DF.EC.AB},$$

$$\mathrm{BF.CD.EA} \doteqdot \mathrm{CF.ED.BA},$$

$$\mathrm{FA.DE.CB} \doteqdot \mathrm{DA.CE.FB},$$

très-connues en Géométrie supérieure, et résultant de la considération des trois autres triangles ADE, BCE, FDC, coupés chacun par une droite.

Si l'une des équipollences précédentes a lieu pour six points d'une droite, les trois autres en résultent nécessairement; par conséquent, en vertu du théorème général du n° 24, la même propriété subsistera pour six points d'un plan. En nous reportant à la signification des équipollences (16), nous voyons que ce théorème peut s'énoncer ainsi :

Si AEBCFD *est un hexagone dans lequel trois angles non adjacents valent ensemble quatre droits, et où le produit de trois côtés non adjacents soit égal au produit des trois autres, nous aurons les mêmes propriétés pour les trois hexagones* AFDCEB, BFCDEA, FADECB, *qui ont les mêmes sommets opposés que le premier, mais pris dans un ordre différent.*

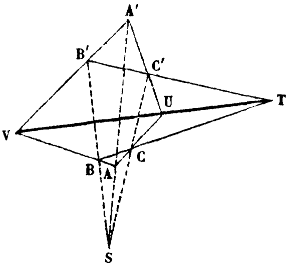
Par rapport à ces hexagones, il existe un point I pour lequel ont lieu les équipollences

$$IA.IC \bumpeq IB.ID \bumpeq IE.IF,$$

sur lesquelles nous reviendrons plus tard.

43. Donnons un second exemple de la manière d'exprimer la condition que des points sont en ligne droite, au moyen de coefficients numériques. Il s'agit de démontrer ce théorème de Desargues : *Si les sommets de deux triangles* ABC, A'B'C' (*fig.* 9) *sont en ligne droite avec*

Fig. 9.



un point fixe S, *les points de concours* T, U, V *de leurs côtés correspondants seront aussi en ligne droite.*

Les conditions données sont exprimées par

$$SA' \bumpeq a\,SA, \quad SB' \bumpeq b\,SB, \quad SC' \bumpeq c\,SC,$$

a, b, c étant trois coefficients numériques indéterminés. De même, la condition que V appartienne à la droite AB est exprimée par

$$AV \bumpeq n\,AB,$$

ou, en réduisant tout à SA, SB, SC, par

$$SV \bumpeq SA + n\,AB \bumpeq (1 - n)\,SA + n\,SB.$$

Comme V doit aussi appartenir à la droite A′B′, on aura pareillement

$$\mathrm{SV} \bumpeq (1 - m)\,\mathrm{SA}' + m\,\mathrm{SB}' \bumpeq a\,(1 - m)\,\mathrm{SA} + bm\,\mathrm{SB}.$$

En comparant les deux expressions de SV, la règle II nous donne

$$1 - n = a(1 - m), \quad n = bm.$$

Tirant de ces relations la valeur de m, on aura

$$\mathrm{SV} \bumpeq \frac{1 - b}{a - b}\,\mathrm{SA}' + \frac{a - 1}{a - b}\,\mathrm{SB}'.$$

Nous trouverons exactement de la même manière

$$\mathrm{ST} \bumpeq \frac{1 - c}{b - c}\,\mathrm{SB}' + \frac{b - 1}{b - c}\,\mathrm{SC}',$$

$$\mathrm{SU} \bumpeq \frac{1 - a}{c - a}\,\mathrm{SC}' + \frac{c - 1}{c - a}\,\mathrm{SA}';$$

d'où l'on déduit

$$(a - b)\,\mathrm{SV} \bumpeq \frac{(1 - b)(c - a)}{c - 1}\,\mathrm{SU} + \frac{(a - 1)(b - c)}{1 - c}\,\mathrm{ST},$$

ou

$$(a - b - ac + bc)\,\mathrm{SV} + (c - a + ab - bc)\,\mathrm{SU} \\ + (b - c + ac - ab)\,\mathrm{ST} \bumpeq 0.$$

Remarquant que l'on a

$$\mathrm{TV} \bumpeq \mathrm{SV} - \mathrm{ST}, \quad \mathrm{TU} \bumpeq \mathrm{SU} - \mathrm{ST},$$

nous voyons qu'on obtient

$$(a - b - ac + bc)\,\mathrm{TV} + (c - a + ab - bc)\,\mathrm{TU} \bumpeq 0,$$

c'est-à-dire (4) que TV a la même inclinaison que TU, ou que TUV est une ligne droite.

44. J'attirerai l'attention du lecteur, en raison des fréquentes occasions qui se présentent d'utiliser cette remarque, sur la manière de rapporter à un point S un point quelconque V d'une droite AB, au moyen de l'équipollence

$$\mathrm{SV} \triangleq (1 - n)\,\mathrm{SA} + n\,\mathrm{SB},$$

n étant un coefficient indéterminé. On remarquera aussi cette conséquence, dépendant de la même formule, que, si

$$r\,\mathrm{SV} + q\,\mathrm{SU} + p\,\mathrm{ST} \triangleq 0,$$

et qu'on ait

$$r + q + p = 0,$$

les trois points V, U, T sont en ligne droite, parce qu'il en résulte

$$r\,\mathrm{TV} + q\,\mathrm{TU} \triangleq 0.$$

Les calculs des coefficients numériques pourront quelquefois devenir un peu longs, surtout si le choix n'en a pas été fait avec discernement ; mais il ne se présentera aucune difficulté, et l'on parviendra toujours au résultat d'une façon directe.

Règles relatives aux droites conjuguées ou perpendiculaires.

45. Pour compléter l'exposition de la méthode des équipollences, il me reste à expliquer deux autres artifices, ou plutôt deux autres notations. Nous avons vu, au n° 40, l'utilité qu'il y a à exprimer par une seule équipollence la similitude de deux triangles, laquelle consiste dans la proportionnalité de deux côtés et dans l'égalité des angles compris ; cela n'eût pas été possible si les deux angles avaient été l'un positif et l'autre né-

gatif, c'est-à-dire si les figures avaient été symétriquement semblables.

Voici un moyen permettant d'étendre les considérations, développées par nous, d'une figure à une autre qui lui soit inversement égale. Une droite ayant la même longueur qu'une droite donnée et la même *inclinaison*, mais de signe contraire (14), sera dite *conjuguée* de la première, et représentée par la caractéristique cj. Ainsi, dans la *fig.* 4, la droite A'B', égale à AB, et d'inclinaison négative égale à l'inclinaison positive de AB, sera désignée sous le nom de *conjuguée* de AB. Nous écrirons

$$A'B' \bumpeq \mathrm{cj}.AB$$

et aussi

$$\mathrm{cj}.A'B' \bumpeq AB.$$

On peut supposer que A'B' soit la droite AB qui a tourné autour d'une parallèle à l'*origine* OH *des inclinaisons*, de manière à effectuer une demi-révolution et à revenir dans le plan de la figure.

46. Si l'on suppose qu'une semblable demi-révolution s'exécute pour toute une figure, on obtient évidemment une figure égale à la première, et qui jouit, par suite, des mêmes propriétés. Donc :

Règle V. — *A une équipollence quelconque correspond toujours sa conjuguée, laquelle s'obtient au moyen de la première, en substituant à chaque droite sa conjuguée.*

47. Un exemple éclaircira l'usage de cette règle.

Problème. — *Trouver le sommet commun de deux triangles symétriquement semblables, de bases données* AD, BC (*fig.* 10).

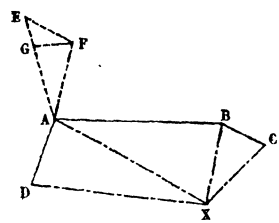
La similitude des deux triangles ADX, BCX est comprise dans les deux égalités

$$\text{gr.}(AX : AD) = \text{gr.}(BX : BC),$$

$$\text{angle}\,DAX = -\,\text{angle}\,CBX.$$

L'un des angles est affecté du signe —, parce que les deux angles sont pris en sens contraires. Si, aux côtés de

Fig. 10.



l'un des angles, nous substituons leurs conjugués, cet angle changera de signe, et ainsi nous aurons (15)

$$\text{inc.}\,AX - \text{inc.}\,AD = \text{inc. cj.}\,BX - \text{inc. cj.}\,BC.$$

De cette façon, l'une et l'autre des deux égalités seront comprises dans l'équipollence

$$AX : AD \stackrel{\triangle}{=} \text{cj.}\,BX : \text{cj.}\,BC.$$

Développant par rapport au point X, on a (10)

$$\text{cj.}\,BC.AX \stackrel{\triangle}{=} AD\ \text{cj.}\,AX - AD\ \text{cj.}\,AB.$$

D'après la règle V, on aura en même temps cette autre équipollence

$$BC\ \text{cj.}\,AX \stackrel{\triangle}{=} \text{cj.}\,AD.AX - \text{cj.}\,AD.AB.$$

Entre ces deux équipollences, nous pourrons (18) éliminer cj. AX, et nous aurons, pour déterminer AX,

$$(AD\,\text{cj.}\,AD - BC\,\text{cj.}\,BC)\,AX \stackrel{\triangle}{=} AD\,(AB\,\text{cj.}\,AD + BC\,\text{cj.}\,AB).$$

Comme nous avons à notre disposition le choix de l'origine des inclinaisons (13), nous en pourrons profiter pour simplifier les constructions. Supposons qu'on prenne pour cette origine la droite AB, de sorte que $AB \bumpeq \mathrm{cj}.AB$, nous aurons

$$(AD\,\mathrm{cj}.AD - BC\,\mathrm{cj}.BC)\,AX \bumpeq AB.AD(\mathrm{cj}.AD + BC).$$

Construisons successivement

$$AE \bumpeq \mathrm{cj}.AD,$$

$$EF \bumpeq BC,$$

$$GE \bumpeq BC\,\mathrm{cj}.BC : AD \bumpeq EF\,\mathrm{cj}.EF : \mathrm{cj}.AE,$$

on aura

$$AX : AB \bumpeq (\mathrm{cj}.AD + BC) : (\mathrm{cj}.AD - GE) \bumpeq AF : AG.$$

De tout ce qui précède résulte la solution suivante : on tire AE égale à AD et également inclinée sur AB, mais de l'autre côté, de sorte que

$$\text{angle}\,DAB = \text{angle}\,BAE.$$

Soit EF équipollente à BC; on forme le triangle FEG symétriquement semblable à AEF, parce qu'on a

$$EG : EF \bumpeq \mathrm{cj}.EF : \mathrm{cj}.EA;$$

enfin on construit ABX directement semblable à AGF.

48. Dans beaucoup de cas (41, 43), on peut constater l'utilité des coefficients numériques servant à accroître ou à diminuer la longueur d'une droite, en lui conservant la même inclinaison; il serait également commode d'avoir des coefficients pouvant accroître ou diminuer l'inclinaison des droites auxquelles on les appliquerait, sans en altérer la longueur. Le signe $\sqrt{}$, ou, à défaut d'un signe spécial, la lettre i, indiquera un accroissement d'incli-

naison d'un angle droit [porté toujours dans le sens HMI (*fig.* 4), vers lequel sont comptées les inclinaisons positives]; ainsi OH, OI, étant égales et perpendiculaires, on écrira

$$\mathrm{OI} \bumpeq \surd\, \mathrm{OH}.$$

Le coefficient $\surd^u$ servira à accroitre l'inclinaison d'une droite de u angles droits, u étant un nombre entier ou fractionnaire. Par suite, le coefficient $\surd^4$ ne produira aucun effet, c'est-à-dire que nous pourrons écrire $\surd^4 \bumpeq 1$; $\surd^2$ change le sens de la droite; par exemple, $\surd^2\mathrm{OM} \bumpeq \mathrm{OL}$, ou $\surd^2 \bumpeq -1$. Ainsi $\surd$ représente ce qui se désigne en Algèbre par $\sqrt{-1}$, et s'énonce *racine de moins un*. Par contraction, nous donnerons au signe $\surd$ le nom de *ramun*. Le plus souvent, au lieu de $\surd^u$, nous écrirons ε^u, auquel cas l'angle u, au lieu d'être rapporté à l'angle droit comme unité, doit être considéré comme étant la longueur de l'arc correspondant de rayon 1. Les analystes verront que ε répond à leur $e^{\sqrt{-1}}$.

49. De même qu'un nombre, au lieu d'être appliqué comme coefficient à une droite, peut être considéré seul, et représente alors une longueur parallèle à l'origine des inclinaisons; de même aussi, le ramun, élevé à une puissance, peut-être considéré en lui-même comme indiquant une longueur égale à l'unité, dont l'inclinaison est marquée par l'exposant. Il en résulte que $z\,\surd^u$ représente une droite égale à z fois l'unité de longueur, et qui est inclinée de u droits sur l'origine des inclinaisons.

50. Comme complément de cette exposition des principes de la méthode des équipollences, nous énoncerons encore les règles suivantes, relatives au ramun et aux droites conjuguées; ces règles sont des conséquences im-

médiates des définitions. Lorsqu'on aura à multiplier $\surd^{u}$ par $\surd^{v}$, on obtiendra $\surd^{u+v}$, parce que, pour former un produit (16), il faut ajouter les inclinaisons u, v. Le produit de $\surd$ par $\surd$ donnera $\surd^{2}$ ou le coefficient -1 ; en divisant l'unité par $\surd$, on aura $-\surd, \ldots$. Donc :

Règle VI. — *Le ramun se calcule précisément comme se calcule en Algèbre l'imaginaire* $\sqrt{-1}$.

51. Règle VII. — *Pour former la conjuguée* (46) *d'une expression quelconque contenant le ramun, il faut changer les signes de tous les exposants de* $\surd$.

Ainsi la conjuguée de $\surd^{u}\mathrm{AB}$ est $\surd^{-u}\,\mathrm{cj.AB}$; celle de $z\surd^{u}$ est $z\surd^{-u}$; celle de $\surd$ est $\surd^{-1} = -\surd$.

52. Règle VIII. — *Le produit de deux droites, ou, plus généralement, de deux expressions conjuguées entre elles, a une inclinaison nulle et une grandeur égale au carré de la grandeur de chacune des deux droites ou des deux expressions.*

En effet, les deux expressions conjuguées ont des grandeurs égales et des inclinaisons égales, mais de signes contraires; et, pour faire le produit, il faut multiplier les grandeurs (16) et ajouter les inclinaisons. Ainsi

$$\mathrm{AB\ cj.BA} \bumpeq (\mathrm{gr.AB})^2;$$

semblablement,

$$z\surd^{u} \bumpeq a + b\surd$$

multipliée par l'expression conjuguée

$$z\surd^{-u} \bumpeq a - b\surd$$

donne

$$z^2 = a^2 + b^2,$$

ce qui exprime le théorème de Pythagore.

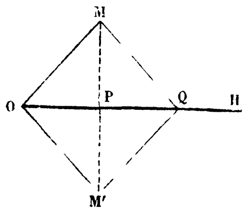
53. Règle IX. — *Une droite, divisée par sa conjuguée, est équipollente au ramun élevé à une puissance égale au double de l'inclinaison de la droite.*

C'est-à-dire que

$$z\sqrt{\ }^{u} : z\sqrt{\ }^{-u} \triangleq \sqrt{\ }^{2u}.$$

54. Règle X. — *La somme géométrique d'une droite et de sa conjuguée a une inclinaison nulle et une grandeur double de la projection de la droite sur l'origine des inclinaisons, ou égale au double produit de la grandeur de la droite par le cosinus de son inclinaison.*

Fig. 11.



En effet (*fig.* 11), si $OQ \triangleq OM + cj.OM$, on aura aussi, d'après la règle V,

$$cj.OQ \triangleq cj.OM + OM \triangleq OQ;$$

par suite, OQ, étant équipollente à sa propre conjuguée, a une inclinaison nulle.

De plus, si OP a une inclinaison nulle, et si PM a une inclinaison d'un droit, on aura

$$cj.OP \triangleq OP, \quad cj.PM \triangleq PM' \triangleq -PM,$$

et les équipollences

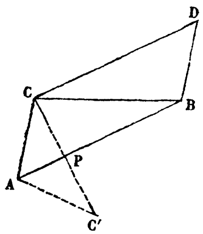
$$OM \triangleq OP + PM, \quad cj.OM \triangleq OP - PM$$

donneront

$$OM + cj.OM \bumpeq 2OP.$$

55. Si nous voulons déterminer la projection de AC sur AB (*fig.* 12), nous remarquerons que la droite AC′

Fig. 12.



(égale à AC et formant avec AB l'angle BAC′ égal à BAC, mais de signe contraire) est donnée par

$$AC' \bumpeq cj.AC.AB : cj.AB,$$

puisque cette équipollence équivaut à

$$gr.AC' = gr.AC$$

et à

$$inc.AC' = inc.cj.AC + inc.AB - inc.cj.AB$$
$$= - inc.AC + inc.AB + inc.AB = 2\,inc.AB - inc.AC.$$

On a par suite

$$2\,AP \bumpeq AC + AC' \bumpeq AC + cj.AC.AB : cj.AB.$$

56. Règle XI. — *La somme géométrique d'une droite, et de sa conjuguée prise avec le signe moins, a une inclinaison d'un droit, et est égale au double de la projection de la droite sur une autre, ayant une inclinaison d'un droit, ou au double produit de la grandeur de la droite par le sinus de son inclinaison.*

En effet, dans la *fig.* 11, il est évident que

$$M'M \triangleq OM - cj.OM \triangleq 2PM.$$

Dans la *fig.* 12, nous aurons

$$2PC \triangleq AC - AC' \triangleq AC - cj.AC.AB : cj.AB.$$

57. En multipliant (*fig.* 12) gr.PC par gr.AB, on obtient un nombre qui, par rapport à l'unité de surface connue, exprime l'aire du parallélogramme ABDC. Donc

$$2PC\,cj.AB \triangleq AC\,cj.AB - cj.AC.AB$$

a une grandeur double du parallélogramme donné; comme les deux termes AC cj. AB, cj. AC. AB sont conjugués entre eux, nous ferons disparaître l'inclinaison d'un droit qui s'applique (56) à leur différence, en divisant par le ramun, et nous aurons l'aire

$$ABDC \triangleq \frac{1}{2\sqrt{}}(AC\,cj.AB - AB\,cj.AC) \triangleq \frac{\sqrt{}}{2}(AB\,cj.AC - AC\,cj.AB).$$

De là :

Règle XII. — *L'aire d'un triangle* ABC *est exprimée par*

$$\frac{\sqrt{}}{4}(AB\,cj.AC - cj.AB.AC),$$

et aussi par

$$\frac{\sqrt{}}{4}(AB\,cj.BC - cj.AB.BC),$$

puisque, d'après la règle I, on établit l'identité

$$AB\,cj.BC - cj.AB.BC \triangleq AB\,cj.(AC - AB) - (AC - AB)\,cj.AB$$
$$\triangleq AB\,cj.AC - AC\,cj.AB.$$

On remarquera que, par la permutation des lettres B, C, l'aire du triangle se trouve exprimée par

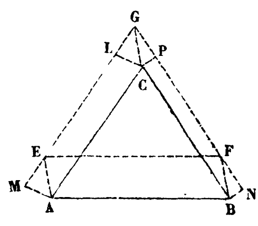
$$\frac{\sqrt{}}{4}\,(\mathrm{AC\;cj.AB} - \mathrm{cj.AC.AB}),$$

c'est-à-dire, dans le cas de la figure, par un nombre négatif égal à — aire ABC. Ce fait, loin d'être un inconvénient de la méthode, en constitue l'un des grands avantages; il permet d'éviter les erreurs que l'on pourrait commettre dans l'addition des aires, si l'on ne considérait pas assez attentivement les diverses positions que peuvent prendre les éléments d'une figure.

On démontre facilement que les aires ABC, BCA, CAB sont identiques, même quant à leurs signes.

58. Faisons deux applications de cette dernière règle de la méthode des équipollences. Si l'on décrit, sur l'un des côtés d'un triangle ABC (*fig.* 13), un parallélo-

Fig. 13.



gramme ABFE, et que l'on construise aussi avec le côté CG $\bumpeq$ AE les deux parallélogrammes ACGE, BFGC, on aura

$$\mathrm{ABFE} \bumpeq \frac{\sqrt{}}{2}\,(\mathrm{AB\;cj.AE} - \mathrm{AE\;cj.AB}),$$

$$\mathrm{ACGE} \bumpeq \frac{\sqrt{}}{2}\,(\mathrm{AC\;cj.AE} - \mathrm{AE\;cj.AC}),$$

$$\mathrm{BFGC} \bumpeq \frac{\sqrt{}}{2}\,(\mathrm{AE\;cj.BC} - \mathrm{BC\;cj.AE}),$$

en introduisant AE à la place de $BF \triangleq CG \triangleq AE$.

Si l'on se rappelle que

$$BC \triangleq AC - AB,$$
$$cj.BC \triangleq cj.AC - cj.AB,$$

on voit que ces trois équipollences donnent

$$ABFE = ACGE + BFGC.$$

Aux parallélogrammes ACGE, BFGC, nous pouvons substituer les deux autres ACLM, BNPC compris entre les mêmes parallèles.

En effet, de

$$AE \triangleq AM + ME \triangleq AM + n AC,$$

on tire

$$AC\,cj.AE - AE\,cj.AC \triangleq AC\,cj.AM - AM\,cj.AC.$$

Par suite, la somme des aires des parallélogrammes ACLM, BNPC est égale à celle de ABFE, dont les deux côtés AE, BF sont équipollents à CG.

Ceci constitue un théorème de Clairaut, comprenant, comme cas particulier, la démonstration du théorème de Pythagore, donnée par Euclide dans sa 47^{e} proposition. Il suffit, pour cela, de supposer que le triangle ACB soit rectangle en C, et que ACLM, BNPC soient deux carrés construits sur les côtés.

59. Au moyen des règles XII et I, on peut donner diverses formes à l'expression de l'aire d'un polygone. Ainsi, pour le quadrilatère, on a

$$ABCD \triangleq ABC + ACD$$
$$\triangleq \frac{\sqrt{}}{4}(AB\,cj.AC - AC\,cj.AB + AC\,cj.AD - AD\,cj.AC).$$

Réduisant toutes les droites aux trois AB, AC, BD, la droite AB s'élimine, et l'on a

$$\begin{aligned} ABCD &\triangleq \frac{\sqrt{}}{2}\,[AB\,\mathrm{cj}.AC - AC\,\mathrm{cj}.AB + AC(\mathrm{cj}.AB + \mathrm{cj}.BD) \\ &\qquad - \mathrm{cj}.AC(AB + BD)] \\ &\triangleq \frac{\sqrt{}}{4}\,(AC\,\mathrm{cj}.BD - \mathrm{cj}.AC.BD). \end{aligned}$$

Par suite : *Un quadrilatère* ABCD *est équivalent au triangle ayant deux côtés équipollents aux diagonales* AC, BD.

60. Pour le pentagone ABCDE (et l'on peut en dire autant pour tout autre polygone), on trouve, en exprimant (10) toutes les diagonales au moyen des côtés,

$$\begin{aligned} AB\,\mathrm{cj}.BC + AC\,\mathrm{cj}.CD + AD\,\mathrm{cj}.DE \triangleq\; & AB\,\mathrm{cj}.BC + AB\,\mathrm{cj}.CD \\ & + AB\,\mathrm{cj}.DE + BC\,\mathrm{cj}.CD \\ & + BC\,\mathrm{cj}.DE + CD\,\mathrm{cj}.DE, \end{aligned}$$

et, par suite, la règle XII nous montre que :

L'aire ABCDE *est la somme de tous les triangles ayant deux côtés équipollents à deux des côtés* AB, BC, CD, DE *du polygone* (*le côté* EA *étant omis*).

(*A suivre.*)