Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 185-191

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__185_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1052

(voir 2ᵉ série, t. X, p. 558);

PAR M. GAMBEY.

Trouver la trajectoire orthogonale d'un système de paraboles égales, tangentes en leur sommet à une droite fixe. (H. BROCARD.)

L'équation générale des paraboles égales tangentes à l'axe des y est

$$(y-a)^2 - 2px = f(x, y, a) = 0,$$

a étant une indéterminée.

Il faut (STURM, *Calcul intégral*, p. 49) éliminer a entre

$$f(x, y, a) = 0,$$

et

$$\frac{df}{dx}dy - \frac{df}{dy}dx = 0,$$

ce qui conduit à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{2x}{p}},$$

dont l'intégrale générale est

$$(y-c)^2 = \frac{8}{9p}x^3,$$

c étant une constante arbitraire.

Cette trajectoire est de la même nature que la développée de la parabole.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et Pellissier.

Question 1084

(voir 2e série, t. XI, p. 288);

Par M. KOEHLER.

Les coniques, inscrites dans un quadrilatère fixe, qui touchent une courbe de troisième classe donnée K, *sont au nombre de douze. Les douze points de contact, les neuf points de rebroussement de* K *et les six sommets du quadrilatère circonscrit sont situés sur une même courbe du cinquième ordre.* (Laguerre.)

Ces propriétés sont une conséquence des théorèmes généraux suivants donnés par M. Chasles (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1864) :

1° Dans toute série de coniques dont les caractéristiques sont μ, ν, il y a $\mu n + \nu m$ coniques qui touchent une courbe donnée d'ordre m et de classe n.

Dans le cas actuel, on a $\mu = 2$, $\nu = 1$, puisqu'il y a deux coniques de la série passant par un point donné, et une seule tangente à une droite donnée; si la courbe K est la plus générale de sa classe, $n = 3$, $m = 6$; il y a donc $2.3 + 6$, ou douze coniques tangentes à K.

2° Le lieu des points d'intersection des tangentes communes à une courbe de classe n et aux coniques d'une série (μ, ν) est d'ordre $\nu(2n - 1)$. Dans le cas de l'énoncé, cet ordre est 5. Les six sommets du quadrilatère appartiennent au lieu; car, par chacun de ces points, on peut mener trois tangentes à K, et chacune de ces tangentes touche une conique de la série. Il en est de même pour les neuf points de rebroussement; car la tangente de rebroussement touche une courbe de la série, et le point de rebroussement est l'intersection de deux tangentes communes infiniment voisines.

Enfin les douze points de contact sont évidemment sur la courbe du cinquième ordre.

Note de M. Laguerre. — Soient

$$(a, b, c, d)(\lambda, \mu)^3 = 0, \quad (A, B, C)(\lambda, \mu)^2 = 0, \quad (A', B', C')(\lambda, \mu)^2 = 0$$

les équations respectives d'une courbe de troisième classe K et de deux coniques C et C' inscrites dans le quadrilatère Q.

L'équation

$$J = \begin{vmatrix} ac - b^2 & ad - bc & bd - c^2 \\ A & B & C \\ A + \lambda A' & B + \lambda B' & C + \lambda C' \end{vmatrix} = 0$$

(qui est indépendante de λ) représente une courbe du cinquième ordre P (*).

L'invariant J s'annule :

1° Pour $ac - b^2 = ad - bc = bd - c^2 = 0$: donc P contient les neuf points de rebroussement de K;

2° Pour $a = b = A + \lambda A' = B + \lambda B' = 0$: donc P contient les douze points des coniques tangentes à K et inscrites dans Q;

3° Pour $A + \lambda A' = B + \lambda B' = C + \lambda C' = 0$: donc P contient les six sommets du quadrilatère Q.

Question 1086

(voir 2e série, t. XI, p. 288);

PAR M. KOEHLER.

Si, par le foyer commun F *de deux coniques, on mène une droite quelconque, et qu'aux points où elle coupe les deux coniques on mène les tangentes aux coniques en ces points, ces quatre tangentes formeront un qua-*

(*) *Voir* mon *Mémoire de Géométrie analytique;* LIOUVILLE, 2e série, t. XVII, § II.

drilatère dont les diagonales seront les cordes communes aux deux coniques.

La droite qui joint les foyers non communs des deux coniques jouit de la même propriété.

(E. Lemoine.)

La première partie de l'énoncé est évidente; car un foyer commun à deux coniques n'est autre chose qu'un ombilic, et toute droite passant par un ombilic jouit de la propriété indiquée. Les deux cordes communes, diagonales du quadrilatère formé par les quatre tangentes, sont celles qui se coupent au point de rencontre des deux directrices correspondant au foyer commun.

Pour démontrer la seconde partie du théorème, je remarquerai que la droite à l'infini (limitée aux points circulaires à l'infini) peut être considérée comme une conique infiniment aplatie L, ayant un ombilic commun F avec les deux coniques données C_1 et C_2. En d'autres termes, C_1, C_2 et L sont inscrites dans l'angle des tangentes imaginaires issues de F. Le second foyer F_1 de C_1 est l'ombilic conjugué de F pour L et C_1; de même F_2 est l'ombilic conjugué de F pour L et C_2. La droite F_1F_2 doit donc, d'après un théorème connu (*), passer par l'ombilic de C_1 et de C_2; ce point n'est autre chose que l'intersection de F_1F_2 avec la polaire commune du point de concours des deux directrices relatives à F, par rapport aux deux courbes.

Il résulte de là que la droite F_1F_2 jouit de la même propriété qu'une droite quelconque passant en F.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et Pellissier.

(*) Le théorème auquel je fais allusion est le suivant :

« Quand trois coniques ont un ombilic commun, les trois autres ombilics conjugues à celui-là sont en ligne droite. »

(Chasles, *Traité des sections coniques*, n° 382.)

Question 1102

(voir 2e série, t. XI, p. 527),

PAR M. J. DE VIRIEU,
Professeur à Lyon.

Démontrer l'égalité suivante :

$$\sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p 2^p \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots(p+1)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \\ \dfrac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

(C. DE POLIGNAC.)

On a les identités suivantes :

$$2(n+1)\sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p 2^p \frac{n!}{(n-p)!(p+1)!} - 1$$

$$= -1 + \sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p 2^{p+1} \frac{(n+1)!}{(n-p)!(p+1)!}$$

$$= -1 - \sum_{p=1}^{p=n+1}(-1)^p 2^p \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!p!}$$

$$= -\sum_{p=0}^{p=n+1}(-1)^p 2^p \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!p!} = -(1-2)^{n+1} = (-1)^n,$$

$$\sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p 2^p \frac{n!}{(n-p)!(p+1)!} = \frac{1}{2}\,\frac{1+(-1)^n}{n+1}.$$

Note. — La question 1110 a aussi été résolue par MM. Moret-Blanc, professeur au lycée du Havre; Humbert, maître répétiteur au lycée de Besançon.

Question 1109

(voir 2ᵉ série, t. XI, p 578);

PAR M. POUJADE,
Professeur au lycée de Nice.

Par les sommets d'un triangle pris deux à deux, on fait passer trois paraboles ayant un point de contact commun. Les diamètres de ces paraboles qui passent par ce point rencontrent les côtés correspondants du triangle en des points tels, que les droites qui les joignent aux sommets opposés concourent en un même point. (G. FOURET.)

Une parabole rapportée à un diamètre et à la tangente au sommet a pour équation $y^2 = 2px$. Les deux segments, déterminés par ce diamètre sur une corde quelconque, sont dans le rapport des ordonnées des extrémités de la corde, qui est égal à la racine carrée de celui des abscisses. Si l'on change l'axe des x, tandis que l'origine et l'axe des y demeurent invariables, le rapport des abscisses ne change pas.

Ceci posé, rapportons les trois paraboles au point de contact pris pour origine et à la tangente commune pour axe des y (l'axe des x étant quelconque). Soient A', A'', A''' les trois sommets du triangle, x', x'', x''' leurs abscisses. Le diamètre de la parabole qui passe par A' et A'' coupe le côté $A'A''$ dans le rapport $\sqrt{\frac{x'}{x''}}$; de même $A''A'''$ est coupé par le diamètre correspondant dans le rapport $\sqrt{\frac{x''}{x'''}}$, enfin $A'''A'$ dans le rapport $\sqrt{\frac{x'''}{x'}}$. Le produit de ces trois nombres est l'unité, et les points de division sont sur les côtés du triangle et non sur leurs prolongements; donc les droites qui joignent ces points aux sommets opposés concourent en un même point.

Note. — La même question a été résolue par MM. Bourguet, à Nantes; Brocard; Genty et Moret-Blanc.