NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. DE SAINT-GERMAIN

Détermination des éléments infinitésimaux relatifs aux lignes à double courbure

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 179-183

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__179_1>

DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS INFINITÉSIMAUX RELATIFS AUX LIGNES A DOUBLE COURBURE

(voir même tome, p. 126);

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

V. L'interprétation géométrique des équations (4) et (6) nous conduit à deux théorèmes importants, et à l'expression des rayons de courbure en un point quelconque.

L'équation (4) donne

$$(4\ bis) \qquad b_2 = \frac{1}{2R_0};$$

mais $b_2 = \lim \frac{y}{s^2}$; puis la distance de M à la tangente en O, qui est $\sqrt{y^2 + z^2}$, est sensiblement égale à y, parce que z est infiniment plus petit que y. Il en résulte que la distance d'un point à la tangente au point infiniment voisin est égale au carré de l'arc qui sépare ces deux points, divisé par le double du rayon de courbure; ou bien l'inverse du rayon de courbure s'obtient en divisant le double de la distance à la tangente par le carré de l'arc.

Considérons donc la tangente en un point x, y, z, et le point voisin dont les coordonnées sont

$$x + dx + \frac{1}{2} d^2 x, \quad y + \ldots;$$

on sait former la distance de ce point à la tangente, et en la divisant par ds^2 on obtient la première courbure au point x, y, z :

$$(7) \qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{ds^3} \sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + \ldots}.$$

L'équation (6) donne

$$(6\ bis) \qquad c_3 = \frac{1}{6 R_0 r_0};$$

mais $c_3 = \lim \frac{z}{s^3}$; z est la distance de M au plan osculateur en O. Donc la distance d'un point au plan osculateur en un point infiniment voisin est égale au cube de l'arc qui sépare les deux points divisé par six fois le produit des deux rayons de courbure. Le point infiniment voisin de x, y, z a pour coordonnées

$$x + dx + \frac{1}{2} d^2 x + \frac{1}{6} d^3 x + \ldots, \quad y + \ldots;$$

en prenant sa distance au plan osculateur en x, y, z, on a

$$\frac{ds^3}{6 R r} = \frac{\sum \frac{1}{6} (dy\,d^2z - dz\,d^2y)\, d^3x}{\sqrt{\sum (dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2}}.$$

En remplaçant R par sa valeur (6), il vient

$$\frac{1}{r} = \frac{\sum (dy\,d^2z - dz\,d^2y)\,d^3x}{\sum (dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2}.$$

Si, au contraire, on remplace le radical par sa valeur tirée de l'équation (6), on trouve

$$(8)\qquad \frac{1}{rR^2} = \frac{\sum (dy\,d^2z - dz\,d^2y)\,d^3x}{ds^6} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \\ \frac{d^3x}{ds^3} & \frac{d^3y}{ds^3} & \frac{d^3z}{ds^3} \end{vmatrix}.$$

VI. Les formules relatives au changement de variable nous permettraient de simplifier l'équation (6) dans le cas où s est la variable indépendante; puis, en faisant le carré du déterminant (8), nous obtiendrions avec M. Hermite (*Cours de l'École Polytechnique*) un résultat remarquable. Mais notre théorème II nous conduit plus facilement au même but. Je remarque que, pour $s = 0$, on a

$$\sum \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0^2 = 4b_2^2 = \frac{1}{R_0^2}.$$

Si l'on changeait d'axes, le point O deviendrait un point quelconque, le premier membre de l'équation conserverait sa valeur, si ce n'est qu'il y aurait à supprimer l'indice o, et l'on aurait généralement

$$\frac{1}{R^2} = \sum \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2.$$

Calculons les dérivées à l'aide des séries (1), et ordonnons :

$$\frac{1}{R^2} = 4b_2^2 + 24b_2b_3s + [16b_2^4 + 48b_2b_4 + 36(b_3^2 + c_3^2)]s^2 + \dots.$$

Élevons à la puissance $-\frac{1}{2}$:

$$R = \frac{1}{2b_2} - \frac{3}{2}\frac{b_3}{b_2^2}s - \left(b_2 + 3\frac{b_4}{b_2^2} + \frac{9}{4}\frac{c_3^2}{b_2^3} - \frac{9}{2}\frac{b_3^2}{b_2^3}\right)s^2 + \dots.$$

Donc

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dR_0}{ds} &= -\frac{3}{2}\frac{b_3}{b_2^2}, \\ \frac{d^2R^0}{ds^2} &= -\frac{1}{2}b_2 - \frac{3}{2}\frac{b_4}{b_2^2} - \frac{9}{8}\frac{c_3^2}{b_2^3} + \frac{9}{4}\frac{b_3^2}{b_2^3}, \end{aligned}\right.$$

en désignant par $\frac{dR_0}{ds}$, etc., ce que deviennent $\frac{dR}{ds}$, etc., pour $s = 0$.

On trouve de la même manière, en faisant $s = 0$, et tenant compte de la valeur de b_3 donnée par la deuxième équation (9),

$$\sum\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0^2 = 36(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2) = \frac{1}{R_0^4} + \frac{1}{R_0^4}\left(\frac{dR_0}{ds}\right)^2 + \frac{1}{R_0^2 r_0^2};$$

en changeant d'axes, on voit qu'on a pour un point quelconque la relation donnée par M. Hermite :

$$(10)\qquad \sum\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)^2 = \frac{1}{R^4} + \frac{1}{R^4}\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 + \frac{1}{R^2r^2}.$$

Mais le moyen le plus simple de calculer r consiste à développer le déterminant (8); on trouve, en négligeant s^2,

$$\frac{1}{rR^2} = \frac{1}{r}(4b_2^2 + 24b_2b_3s + \dots) = 12b_2c_3 + 48b_2c_4s + \dots,$$

d'où

$$r = \frac{1}{3c_3}\left[b_2 + \left(6b_3 - \frac{4b_2c_3}{c_4}\right)s\right].$$

Tenant compte des valeurs de b_2, b_3, c_3 :

$$(11)\quad \begin{cases} r = r_0 - \left(\dfrac{2r_0}{R_0}\dfrac{dR_0}{ds} + 24R_0r_0^2c_4\right)s + \ldots, \\ \dfrac{dr_0}{ds} = -2\dfrac{r_0}{R_0}\dfrac{dR_0}{ds} - 24R_0r_0^2c_4. \end{cases}$$

VII. Les équations (4 *bis*), (6 *bis*), (9), (11) et (3) nous donnent les valeurs des coefficients des séries (1) en fonction des deux rayons de courbure au point O. J'en forme le tableau en supprimant les indices de R et de r, ainsi que je le ferai dans les deux paragraphes suivants; il n'y a pas de confusion à craindre, puisqu'il ne s'agit que d'éléments relatifs au point O :

$$a_3 = -\frac{1}{6R^2}, \quad a_4 = \frac{1}{8R^3}\frac{dR}{ds},$$

$$b_2 = \frac{1}{2R}, \qquad b_3 = -\frac{1}{6R^2}\frac{dR}{ds},$$

$$b_4 = -\frac{1}{24R^3}\left[1 + \frac{R^2}{r^2} - 2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 + R\frac{d^2R}{ds^2}\right],$$

$$c_3 = \frac{1}{6Rr}, \quad c_4 = -\frac{1}{24Rr}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{ds} + \frac{2}{R}\frac{dR}{ds}\right).$$

(*A suivre.*)