Nouvelles annales de mathématiques

H. Laurent

Note sur un passage de la théorie analytique des probabilités

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 176-179

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__176_1>

NOTE SUR UN PASSAGE DE LA THÉORIE ANALYTIQUE DES PROBABILITÉS;

PAR M. H. LAURENT.

A la page 181 de la *Théorie analytique des Probabilités*, Laplace énonce le théorème suivant :

« La probabilité d'un événement composé de deux événements est le produit de la probabilité d'un de ces événements par la probabilité que, cet événement étant arrivé, l'autre aura lieu. »

Ce théorème n'est pas parfaitement exact, et il est essentiel d'ajouter, ainsi que cela ressort de la démonstration que donne Laplace : « Pourvu que, à chaque cas relatif au premier événement, corresponde toujours un même nombre de cas relatifs au second, quelle que soit la façon dont les épreuves se présentent. »

Pour montrer toute l'importance du correctif que je propose d'adjoindre au théorème de Laplace, je vais traiter une question dans laquelle une application trop précipitée du principe de la probabilité composée conduirait à un résultat inexact.

Problème. — On jette au hasard n billes dans une boîte cylindrique dont la base est divisée en deux compartiments A, B égaux, en sorte que les billes peuvent tomber dans l'un ou dans l'autre compartiment avec la même facilité. On prend les billes tombées dans le compartiment A, et on les jette de nouveau dans la boîte : on demande la probabilité pour qu'il tombe a billes au premier coup, et b billes au second coup dans le compartiment en question.

Si l'on appliquait le théorème ci-dessus mentionné, on raisonnerait comme il suit : La probabilité de mettre a billes au premier coup dans A est C_n^a, nombre des cas favorables, divisé par la somme des combinaisons C_n^0, C_n^1, $C_n^2, \ldots, C_n^n$, nombre total des cas possibles et également possibles qui peuvent se présenter. Cette somme étant égale à 2^n, on a, pour la probabilité de mettre a billes au premier coup dans A,

$$C_n^a : 2^n.$$

Cet événement ayant eu lieu, il reste à calculer la probabilité de mettre b billes sur a au second coup dans le compartiment A; cette probabilité est

$$C_a^b : 2^a.$$

On aurait donc, par le principe de la probabilité composée,

$$C_n^a\,C_a^b : 2^{n+a}.$$

Or il est facile de voir que ce résultat est absurde.

Évaluons, en effet, directement le nombre des cas favorables et des cas possibles, quand on attend l'événement composé. Il est clair que le nombre des cas favorables est $C_n^a\,C_a^b$; en effet, les cas favorables sont les cas dans lesquels on obtient dans A une combinaison de n billes a à a au premier coup, et une combinaison de a billes b à b au second. A chacun des cas favorables de la première épreuve correspondent C_a^b cas favorables de la seconde : on a donc en tout $C_a^b \times C_n^a$ cas favorables.

Au premier coup, on peut mettre dans A : 0, 1, 2,..., n billes. Si l'on met 0 bille au premier coup, on pourra en mettre 0, 1, 2,..., n au second coup, ce qui produit déjà $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$ ou 2^n cas possibles. Mais on peut mettre 1 bille au premier coup, et cela de C_n^1 manières; au second coup, on pourra alors en mettre 0, 1, 2,..., $n-1$, ce qui constitue $C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \ldots + C_{n-1}^{n-1}$ ou 2^{n-1} cas possibles, relativement au second coup : donc on aura $2^{n-1}C_n^1$ cas possibles, en mettant une seule bille au premier coup dans A; en continuant ce mode de raisonnement, on verrait facilement qu'en mettant 2 billes, 3 billes, etc., au premier coup, on a $2^{n-2}C_n^2$, $2^{n-3}C_n^3$, etc., cas possibles correspondants; on a donc en tout

$$2^n + 2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-2}C_n^2 + \ldots + 2C_n^{n-1} + C_n^n \text{ cas possibles.}$$

Ce nombre est égal, comme on sait, à 3^n; la probabilité cherchée est donc

$$\frac{C_n^a\,C_a^b}{3^n}.$$

On verrait, d'une façon toute semblable, que l'expression

$$\frac{C_n^a C_a^b C_b^c \ldots C_k^l}{\mu^n}, \tag{1}$$

dans laquelle μ désigne le nombre des lettres a, b, c,..., l, n, est la probabilité P de mettre a billes dans le compartiment A au premier coup, d'en mettre b au second,..., l au $(\mu - 1)^{ième}$.

L'expression (1) peut encore s'écrire

$$\frac{1}{\mu^n} \frac{n!}{a!(n-a)!} \frac{a!}{b!(a-b)!} \cdots \frac{k!}{l!(k-l)!} = \text{P}.$$

En employant le symbole $n!$ pour représenter le produit $1.2.3\ldots n$, on a encore

$$\text{P} = \frac{1}{\mu^n} \frac{n!}{(n-a)!(a-b)!\ldots!(k-l)!\,l!}.$$