NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TH. DIEU

Mouvement d'un point matériel pesant et libre dans un fluide homogène en repos

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 161-176

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__161_1>

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL PESANT ET LIBRE DANS UN FLUIDE HOMOGÈNE EN REPOS;

PAR M. TH. DIEU.

L'hypothèse d'une résistance proportionnelle au carré de la vitesse du mobile, généralement admise dans les éléments de Mécanique rationnelle, n'est pas satisfaisante, car elle ne conduit pas à des résultats qui puissent être mis, au moins approximativement, d'accord avec l'observation, pour quelques mouvements. Quelle que soit la fonction de la vitesse qu'on prenne pour représenter la résistance, il faudrait sans doute tenir compte de la communication du mouvement au fluide, comme l'a fait Poisson dans un Mémoire sur le pendule simple dans l'air. Mais, sans aller si loin et sans sortir des éléments, on peut essayer d'exprimer la résistance par la fonction binôme $Av + Bv^2$ de la vitesse acquise v, adoptée par quelques balisticiens, à qui elle a donné des résultats plausibles.

I.

Mouvement d'un point matériel pesant et libre, sans vitesse initiale, dans un fluide homogène en repos, dont la résistance pour l'unité de masse est représentée par la fonction $Av + Bv^2$ de la vitesse v acquise à la fin du temps t.

Si l'on désigne par α et $-\beta$ les racines de l'équation $Bv^2 + Av - g = 0$, lesquelles sont de signes contraires, car on doit admettre que B est positif, l'équation du mouvement est

$$\frac{dv}{dt} = B(p + v)(\alpha - v).$$

En posant $(\alpha + \beta)B = \gamma$, on tire de cette équation

$$\gamma\, dt = \frac{dv}{\beta + v} + \frac{dv}{\alpha - v},$$

d'où l'intégrale particulière

$$\gamma t = l\, \frac{\alpha(\beta + v)}{\beta(\alpha - v)},$$

la constante étant déterminée de manière que v soit nul pour $t = 0$. Résolvant par rapport à v, on a

$$(1) \qquad v = \alpha\left(1 - \frac{\alpha + \beta}{\beta e^{\gamma t} + \alpha}\right).$$

Il résulte évidemment de cette formule que la vitesse, qui augmente avec t, reste toujours inférieure à la fonction α des coefficients spécifiques A et B de la résistance.

Par la substitution de $\frac{dx}{dt}$ à v, on a

$$dx = \alpha dt + \frac{\alpha + \beta}{\gamma} \frac{d(\alpha e^{-\gamma t})}{\beta + \alpha e^{-\gamma t}},$$

d'où

$$(2) \qquad x = \alpha t + \frac{\alpha + \beta}{\gamma} l \frac{\beta + \alpha e^{-\gamma t}}{\alpha + \beta},$$

en disposant de la constante de manière que x soit nul pour $t = 0$.

De $\alpha\beta = \frac{g}{B}$ et $\alpha + \beta = \frac{\gamma}{B}$, on déduit

$$\alpha = \frac{\beta(\alpha\gamma - g)}{g} \quad \text{et} \quad \alpha + \beta = \frac{\alpha\beta\gamma}{g} = \frac{\alpha^2\gamma}{\alpha\gamma - g};$$

les formules (1) et (2) se ramènent, d'après cela, à

$$(3) \qquad v = \alpha\left(1 - \frac{\alpha\gamma}{\alpha\gamma - g + g e^{\gamma t}}\right),$$

$$(4) \qquad x = \alpha\left[t + \frac{\alpha}{\alpha\gamma - g} l \frac{g + (\alpha\gamma - g)e^{-\gamma t}}{\alpha\gamma}\right],$$

où il n'entre que deux paramètres, α, γ, relatifs à la résistance.

Il suffit d'avoir les vitesses a, a', acquises à la fin de deux chutes de durées θ, θ', pour arriver aux valeurs de α, γ, qui conviennent au milieu dans lequel le mouvement s'effectue, si toutefois l'hypothèse sur la résistance est admissible (*). En remplaçant v et t par leurs valeurs dans la formule (3), il vient

$$g(\alpha - a)(e^{\theta\gamma} - 1) - a\alpha\gamma = 0, \quad g(\alpha - a')(e^{\theta'\gamma} - 1) - a'\alpha\gamma = 0,$$

et l'élimination de α donne l'équation

$$g(a' - a)(e^{\theta\gamma} - 1)(e^{\theta'\gamma} - 1) - aa'\gamma(e^{\theta'\gamma} - e^{\theta\gamma}) = 0.$$

Si l'on pose $e^{\theta\gamma} = \xi$, d'où $\theta\gamma = l\xi$ et $e^{\theta'\gamma} = \xi^{\frac{\theta'}{\theta}}$, cette équation se ramène à

$$g(a' - a)(\xi - 1)\left(\xi^{\frac{\theta'}{\theta}} - 1\right) - \frac{aa'}{\theta}\left(\xi^{\frac{\theta'}{\theta}} - \xi\right) l\xi = 0,$$

d'où il faudra tirer la valeur de ξ par des approximations successives. Celles de γ, α, β, B et A s'obtiendront ensuite facilement.

Pour avoir une première valeur approchée de ξ, on peut employer les deux courbes

$$\eta = l\xi, \quad \eta = g\theta\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}\right)\frac{(\xi - 1)\left(\xi^{\frac{\theta'}{\theta}} - 1\right)}{\xi^{\frac{\theta'}{\theta}} - \xi},$$

qui se coupent au point $\xi = 1$, $\eta = 0$, qu'on doit rejeter, et qui ont toutes deux l'axe des η pour asymptote. Si l'on avait $\theta' = 2\theta$, la seconde courbe deviendrait une hyperbole ayant son centre à l'origine.

La substitution de leurs valeurs à α, γ et celle de θ, puis de θ' à t, dans la formule (4), devront conduire aux hauteurs de chute qui auront été mesurées. S'il n'en était pas ainsi, la résistance ne pourrait pas être représentée par la formule $Av + Bv^2$.

(*) Les vitesses a, a' peuvent être évaluées au moyen d'un pendule balistique convenablement modifié.

II.

Mouvement d'un point matériel pesant et libre dans un fluide homogène en repos, dont la résistance est la même que dans le problème précédent, la vitesse initiale étant verticale et dirigée de bas en haut.

L'équation du mouvement est

$$\frac{dv}{dt} = -\left[g - \frac{A^2}{4B} + B\left(v + \frac{A}{2B}\right)^2\right].$$

Il y a trois cas à examiner :

1° Soit $g - \frac{A^2}{4B} > 0$. B étant toujours positif, on posera $g - \frac{A^2}{4B} = B\varepsilon^2$. Si l'on remplace, en outre, $v + \frac{A}{2B}$ par v', l'équation devient

$$B\,dt = -\frac{dv'}{\varepsilon^2 + v'^2}.$$

L'intégration, faite de manière que $v' = v'_0$ pour $t = 0$, v'_0 désignant la valeur de v' correspondant, d'après $v' = v + \frac{A}{2B}$, à la valeur initiale v_0 de v, donne

$$B\varepsilon t = \operatorname{arctang}\frac{v'_0}{\varepsilon} - \operatorname{arctang}\frac{v'}{\varepsilon} = \operatorname{arctang}\frac{\varepsilon(v'_0 - v')}{\varepsilon^2 + v'_0 v'},$$

d'où

$$(1) \qquad v = \varepsilon\frac{v'_0 - \varepsilon \operatorname{tang} B\varepsilon t}{v'_0 \operatorname{tang} B\varepsilon t + \varepsilon} - \frac{A}{2B}.$$

Remplaçant v par $\frac{dx}{dt}$, on a

$$dx = \varepsilon\frac{v'_0 \cos B\varepsilon t - \varepsilon \sin B\varepsilon t}{v'_0 \sin B\varepsilon t + \varepsilon \cos B\varepsilon t}dt - \frac{A\,dt}{2B},$$

d'où

$$(2)\qquad x = \frac{1}{B}\, l\left(\frac{v'_0}{\varepsilon}\sin B\varepsilon t + \cos B\varepsilon t\right) - \frac{At}{2B},$$

en disposant de la constante de manière que x soit nul pour $t = 0$.

D'après la formule (1), la vitesse devient nulle et le mouvement ascendant cesse pour la valeur de t, qui satisfait à l'équation

$$2B\varepsilon(v'_0 - \varepsilon \tang B\varepsilon t) - A(v'_0 \tang B\varepsilon t + \varepsilon) = 0.$$

On en tire

$$\tang B\varepsilon t = \varepsilon \frac{2Bv'_0 - A}{2B\varepsilon^2 + Av'_0} = \frac{2B\varepsilon v_0}{2g + Av_0},$$

puis

$$t = \frac{1}{B\varepsilon} \operatorname{arctang} \frac{2B\varepsilon v_0}{2g + Av_0}.$$

La formule (2) donne, pour cette valeur de t,

$$x = \frac{1}{2B}\, l\,\frac{g + Av_0 + Bv_0^2}{g} - \frac{A}{2B^2\varepsilon} \operatorname{arctang} \frac{2B\varepsilon v_0}{2g + Av_0},$$

ce qui détermine la position extrême du mobile. Dès qu'il y sera parvenu, le mouvement changera de sens et sera celui qui fait l'objet du premier problème.

Si l'on remplace, dans la formule (4), problème I, x par la valeur que donne la formule ci-dessus, on a l'équation qui détermine la durée du retour du mobile à la position d'où il a été lancé, et, en remplaçant t par la valeur de cette durée dans la formule (3), même problème, on obtient la vitesse correspondante.

L'expression ci-dessus de x devient indéterminée pour $A = 0$, $B = 0$; mais, si on la développe d'abord suivant les puissances de A et de B, elle donne $x = \frac{v_0^2}{2g}$.

2° Soit $g - \frac{A^2}{4B} = 0$. En posant $A = \frac{2g}{a}$, on a

$$B = \frac{A^2}{4g} = \frac{g}{a^2},$$

et l'équation du mouvement devient

$$\frac{g}{a^2}\,dt = -\,\frac{dv}{(v+a)^2}.$$

L'intégration, faite de manière que $v = v_0$ réponde à $t = 0$, donne

$$\frac{gt}{a^2} = \frac{v_0 - v}{(v_0 + a)(v + a)},$$

d'où l'on tire

$$v = \frac{v_0 - a\lambda t}{1 + \lambda t},$$

si l'on pose, pour abréger, $\frac{g}{a^2}(v_0 + a) = \lambda$.

On a, d'après cela,

$$dx = \frac{a^2\lambda\,dt}{g(1+\lambda t)} - a\,dt,$$

d'où

$$x = \frac{a^2}{g}\,l(1+\lambda t) - at,$$

en intégrant et en disposant de la constante de manière que x soit nul pour $t = 0$.

Au point extrême,

$$t = \frac{v_0}{a\lambda} \quad \text{et} \quad x = \frac{a^2}{g}\,l\left(1 + \frac{v_0}{a}\right) - \frac{v_0}{\lambda}.$$

3° Soit $g - \frac{A^2}{4B} < 0$. En posant $g - \frac{A^2}{4B} = -B\varepsilon^2$ et $v + \frac{A}{2B} = v'$, on a

$$B\,dt = \frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{dv'}{v'+\varepsilon} - \frac{v'-\varepsilon}{v'-\varepsilon}\right).$$

L'intégration, faite de manière que $v' = v'_0$ pour $t = 0$, v'_0 désignant la valeur initiale $v_0 + \frac{A}{2B}$ de v', donne

$$2B\varepsilon t = l\left(\frac{v'_0 - \varepsilon}{v'_0 + \varepsilon}\,\frac{dv'}{v' - \varepsilon}\right),$$

d'où l'on déduit

$$v = \varepsilon\,\frac{k e^{2B\varepsilon t} + 1}{k e^{2B\varepsilon t} - 1} - \frac{A}{2B},$$

en posant $\frac{v'_0 + \varepsilon}{v'_0 - \varepsilon} = k$.

On a, d'après cela,

$$dx = \varepsilon\,\frac{k e^{B\varepsilon t} + e^{-B\varepsilon t}}{k e^{B\varepsilon t} - e^{-B\varepsilon t}}\,dt - \frac{A\,dt}{2B},$$

d'où

$$x = \frac{1}{B}\,l\,\frac{k e^{B\varepsilon t} - e^{-B\varepsilon t}}{k - 1} - \frac{At}{B},$$

en ayant égard à la condition que x soit nul pour $t = 0$.

La vitesse v devient nulle pour la valeur de t, qui satisfait à l'équation

$$2B\varepsilon(k e^{2B\varepsilon t} + 1) - A(k e^{2B\varepsilon t} - 1) = 0,$$

de laquelle se déduit

$$t = \frac{1}{2B\varepsilon}\,l\,\frac{A + 2B\varepsilon}{k(A - 2B\varepsilon)}.$$

On a, pour cette valeur de t,

$$x = \frac{1}{B}\,l\left(\frac{2\varepsilon}{k - 1}\sqrt{\frac{Bk}{g}}\right) - \frac{A}{4B^2\varepsilon}\,l\,\frac{(A + 2B\varepsilon)^2}{4Bgk},$$

ce qui détermine la position extrême du mobile, à partir de laquelle le mouvement change de sens et devient celui du problème I.

III.

Mouvement d'un point matériel pesant et libre, ayant une vitesse initiale oblique à l'horizon, dans un fluide homogène et en repos, dont la résistance est la même que dans les deux problèmes précédents.

1° θ désignant l'inclinaison de la vitesse v acquise à la fin du temps t, et s la longueur de l'arc de la trajectoire décrit à partir de la position initiale, on a, en prenant les composantes horizontales,

$$\frac{d(v\cos\theta)}{dt} = -(A+Bv)v\cos\theta \quad \text{ou} \quad \frac{d(v\cos\theta)}{v\cos\theta} = -A\,dt - B\,ds,$$

d'où

$$v\cos\theta = v_0\cos\theta_0\, e^{-At-Bs},$$

eu égard aux conditions initiales, θ_0 étant l'inclinaison de la vitesse initiale v_0.

Le rayon de courbure de la trajectoire est égal à $-\dfrac{ds}{d\theta}$ pour la position du mobile à la fin du temps t; la considération des composantes normales donne donc

$$v^2 = -g\cos\theta\,\frac{ds}{d\theta}.$$

Cette équation et la précédente reviennent à

$$(1) \qquad \frac{ds}{dt}\cos\theta - v_0\cos\theta_0\, e^{-At-Bs} = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{ds}{dt}\frac{d\theta}{dt} + g\cos\theta = 0,$$

entre lesquelles l'élimination de s est facile. On a, en différentiant,

$$\frac{d^2 s}{dt^2}\cos\theta - \frac{ds}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\sin\theta - v_0\cos\theta_0 \mathrm{B} e^{-\mathrm{A}t-\mathrm{B}s}\right)$$
$$+ v_0\cos\theta_0 \mathrm{A} e^{-\mathrm{A}t-\mathrm{B}s} = 0,$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2}\frac{d\theta}{dt} + \frac{ds}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2} - g\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = 0,$$

et, par l'élimination de $\frac{d^2 s}{dt^2}$,

$$(3)\ \left\{\begin{aligned} &\frac{ds}{dt}\left[\frac{d^2\theta}{dt^2}\cos\theta + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\sin\theta - v_0\cos\theta_0 \mathrm{B} e^{-\mathrm{A}t-\mathrm{B}s}\frac{d\theta}{dt}\right] \\ &\qquad - (g\sin\theta\cos\theta + v_0\cos\theta_0 \mathrm{A} e^{-\mathrm{A}t-\mathrm{B}s})\frac{d\theta}{dt} = 0. \end{aligned}\right.$$

On tire de l'équation (2)

$$\frac{ds}{dt} = -g\cos\theta : \frac{d\theta}{dt},$$

et, par suite, l'équation (1) donne

$$e^{-\mathrm{A}t-\mathrm{B}s} = \frac{\cos\theta}{v_0\cos\theta_0}\frac{ds}{dt} = -\frac{g\cos^2\theta}{v_0\cos\theta_0} : \frac{d\theta}{dt}.$$

Substituant ces valeurs à $\frac{ds}{dt}$ et à $e^{-\mathrm{A}t-\mathrm{B}s}$ dans l'équation (3), on arrive à

$$(4)\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\tang\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \mathrm{A}\frac{d\theta}{dt} + \mathrm{B}g\cos\theta = 0.$$

x et y désignant les coordonnées du mobile à la fin du temps t par rapport aux axes ordinairement employés pour le mouvement dans le vide, en posant $\frac{dy}{dx}$ ou $\tang\theta = y'$, d'où

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{dy'}{dt}\cos^2\theta = \dfrac{dy'}{dt}\,\dfrac{1}{1+y'^2} \\ \text{et} \\ \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \dfrac{(1+y'^2)\dfrac{d^2y'}{dt^2} - 2y'\left(\dfrac{dy'}{dt}\right)^2}{(1+y'^2)^2}, \end{cases}$$

l'équation (4) se ramène à

$$(6)\qquad \frac{d^2y'}{dt^2} - A\frac{dy'}{dt} + Bg\sqrt{1+y'^2} = 0.$$

Enfin, par le changement de variable indépendante, pour lequel on pose $\dfrac{dy'}{dt} = z$, on a l'équation du premier ordre

$$(7)\qquad \left(\frac{dz}{dy'} - A\right)z + Bg\sqrt{1+y'^2} = 0.$$

Il n'est pas possible d'intégrer cette équation sous forme finie, et le développement de z, en série ordonnée suivant les puissances croissantes de y', ne conduit à rien, si l'on ne suppose pas que y' reste assez voisin de zéro pendant une certaine partie du mouvement à laquelle on veut se borner. Mais, étant donnée la valeur y'_1 de y', ou, ce qui revient au même, la valeur θ_1 de θ pour une position M_1 du mobile, on peut, par la méthode de Cauchy (*Leçons de Calcul différentiel et intégral,* rédigées par M. l'abbé Moigno, t. II, p. 385 et suiv.; 1844), calculer la valeur correspondante z_1 de $z = \dfrac{dy'}{dt}$, et, cela fait, on a la valeur v_1 de v par la formule

$$(8)\qquad v = -g\sqrt{1+y'^2} : \frac{dy'}{dt},$$

qui se déduit de l'équation (3) et de la première des formules (5). Pendant une durée assez petite τ à partir de l'instant où le mobile arrive en M, on admettra qu'il parcourt dans la direction $M_1 T_1$, déterminée par $y' = y'_1$, de la vitesse v_1, l'espace $M_1 M_2 = v_1 \tau$; et l'on considérera M_2 comme appartenant à la trajectoire. Pour M_2, on aura $y' = y'_1 + z_1 \tau = y'_2$, et ainsi de suite. Les premières valeurs de θ et de v seront naturellement, dans ce calcul, leurs valeurs initiales θ_0, v_0.

2° Si l'angle θ_0 avait une valeur positive assez petite, et si l'on ne considérait que la partie de la trajectoire située du côté des y positifs, y'^2 serait toujours une quantité très-petite. En négligeant y'^2 par rapport à 1 dans l'équation (6), elle se réduit à

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} - A \frac{dy'}{dt} + Bg = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$y' = C - C' g e^{At} + \frac{Bgt}{A}.$$

La formule (8), réduite de même à $v = -g : \frac{dy'}{dt}$, donne, en y remplaçant y' par sa valeur,

$$v = \frac{A}{C'A^2 e^{At} - B}.$$

Pour que $v = v_0$ et $y' = \operatorname{tang}\theta_0$ répondent à $t = 0$, il faut prendre

$$C' = \frac{A + Bv_0}{A^2 v_0}, \quad C = \operatorname{tang}\theta_0 + C'g;$$

on a donc

$$(9) \qquad y' = \operatorname{tang}\theta_0 - g\,\frac{A + Bv_0}{A^2 v_0}\,(e^{At} - 1) + \frac{Bgt}{A},$$

$$(10) \qquad v = \frac{A v_0}{(A + Bv_0)e^{At} - Bv_0}.$$

De $dx = ds \cos\theta$ qu'on doit réduire à $dx = ds = v\,dt$, et de la valeur précédente de v, il résulte

$$dx = \frac{A v_0 e^{-At}\,dt}{A + Bv_0(1 - e^{-At})},$$

d'où, en intégrant de manière que x soit nul pour $t = 0$,

$$(11) \qquad x = \frac{1}{B}\, l\, \frac{A + Bv_0(1 - e^{-At})}{A}.$$

L'élimination de t entre les équations (9) et (11) conduit à

$$dy = \left(\tang\theta_0 - g\,\frac{A + Bv_0}{Av_0}\,\frac{e^{Bx} - 1}{A + Bv_0 - Ae^{Bx}} \right.$$
$$\left. - \frac{Bg}{A^3}\, l\, \frac{A + Bv_0 - Ae^{Bx}}{Bv_0}\right) dx,$$

dont l'intégrale, prise sous la condition que y soit nul pour $x = 0$, est

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} y &= \left(\tang\theta_0 + \frac{g}{Av_0}\right) x + \frac{g}{A^2}(1 - Bx)\, l\, \frac{A + Bv_0 - Ae^{Bx}}{Bv_0} \\ &\quad - \frac{B^2 g}{A} \int_0^x \frac{x\,dx}{(A + Bv_0)e^{-Bx} - A}. \end{aligned} \right.$$

Cette équation permet de calculer approximativement, lorsque θ_0 est assez petit, la valeur x_1 de x, différente de zéro, pour laquelle y est nul (*amplitude du jet*), et les valeurs de y correspondant à des valeurs de x entre zéro et x_1. Au moyen de ces valeurs, on pourra décrire à peu près la partie de la trajectoire qui est au-dessus de l'axe des x. Il n'y a aucun compte à tenir de l'asymptote verticale que l'équation (12) indique, de même que la formule (11).

3° Les résultats connus pour une résistance simplement proportionnelle au carré de la vitesse se déduisent facilement de l'analyse précédente. En faisant $A = 0$ dans l'équation (7), elle se réduit effectivement à

$$z\,dz + Bg\sqrt{1+y'^2}\,dy' = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$z^2 + Bg\left[y'\sqrt{1+y'^2} + l(y' + \sqrt{1+y'^2}) - \gamma\right] = 0,$$

γ étant une constante arbitraire. On tire de là

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{Bg}}\frac{dy'}{\sqrt{Y}},$$

si l'on pose, pour abréger,

$$\gamma - y'\sqrt{1+y'^2} - l\left(y' + \sqrt{1+y'^2}\right) = Y.$$

D'après la formule (8) et d'après

(13) $$dx = \frac{v\,dt}{\sqrt{1+y'^2}},$$

qui s'appliquent à toute loi de la résistance, on a ensuite

$$v = \sqrt{\frac{g}{B}}\sqrt{\frac{1+y'^2}{Y}}, \quad dx = -\frac{1}{B}\frac{dy'}{Y},$$

puis

$$dy = -\frac{1}{B}\frac{y'\,dy'}{Y}, \ldots$$

4° Si l'on supposait $B = 0$, c'est-à-dire la résistance proportionnelle à la vitesse, ce qui paraît ne pouvoir convenir qu'à un mouvement assez lent, par conséquent peu étendu et de vitesse initiale assez petite, l'équation (6), réduite à

$$\frac{d^2y'}{dt^2} - A\frac{dy'}{dt} = 0,$$

donnerait immédiatement

$$\frac{dy'}{dt} = Ay' - C,$$

d'où

(14) $$t = \frac{1}{A}\, l\, \frac{C - Ay'}{C'},$$

C et C′ étant deux constantes arbitraires. Par la substitution de sa valeur à $\frac{dy'}{dt}$ dans la formule (8), on a

$$v = g\,\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{C - Ay'}.$$

C et C′ sont donc déterminées par

$$C = A \tang\theta_0 + \frac{g}{v_0 \cos\theta_0}, \quad C' = \frac{g}{v_0 \cos\theta_0},$$

en raison de ce que $v = v_0$ et $y' = \tang\theta_0$ doivent répondre à $t = 0$.

On tire de la formule (14)

$$y' = \frac{C}{A} - \frac{C'}{A} e^{At}.$$

En remplaçant y' par cette valeur dans la formule (13), il vient

$$dx = -\frac{g\,dy'}{(C - Ay')^2},$$

d'où

(15) $$x = C'' - \frac{g}{A(C - Ay')},$$

et la constante C″ est donnée par

$$C'' = \frac{g}{A(C - A\tang\theta_0)} = \frac{v_0\cos\theta_0}{A},$$

d'après la condition que $x = 0$ pour $y' = \tang \theta_0$, eu égard à la valeur de C.

On a enfin

$$dy = -\frac{gy'\,dy'}{(C - Ay')^2} = \frac{g}{A}\left[\frac{dy'}{C - Ay'} - \frac{C\,dy'}{(C - Ay')^2}\right],$$

d'où

$$y = C''' - \frac{g}{A^2}\left[l(C - Ay') + \frac{C}{C - Ay'}\right],$$

et, en remplaçant y' par sa valeur tirée de l'équation (15), il vient

$$y = \frac{C}{A}x + \frac{g}{A^2}\,l\left(1 - \frac{x}{C''}\right),$$

après avoir déterminé la dernière constante C'', de manière que y soit nul en même temps que x.

La courbe que cette équation représente, et qui a pour asymptote la verticale $x = C'' = \frac{v_0 \cos \theta_0}{A}$, est facile à construire.