G. BELLAVITIS

Exposition de la méthode des équipollences

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 145-161
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__145_0>

EXPOSITION DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES

(suite, voir même tome, p. 97);

PAR M. G. BELLAVITIS.

(Traduit de l'italien par M. LAISANT, capitaine du Génie.)

---

19. Toutes les fois que nous parviendrons à une équipollence binôme, nous pourrons la supposer réduite (16) à la forme $m\mathrm{IL} \triangleq n\mathrm{MN}$, et nous en déduirons les deux conséquences

$$\mathrm{inc.IL} = \mathrm{inc.MN} \quad \text{et} \quad m\,\mathrm{gr.IL} = n\,\mathrm{gr.MN}.$$

Si, d'après les données de la question, il est impossible que inc.IL = inc.MN, il en résulte que les deux coefficients m, n sont nuls l'un et l'autre. Donc :

RÈGLE II. — *Si les deux termes d'une équipollence binôme ont des inclinaisons différentes, chacun d'eux est nul.*

20. Toutes les fois que nous parviendrons à une équipollence trinôme, nous pourrons en considérer les termes comme respectivement équipollents à ceux de l'équipollence trinôme identique (10)

$$\mathrm{LM} + \mathrm{MN} + \mathrm{NL} \triangleq 0.$$

S'il arrive que l'on ait inc.LM = inc.MN, les deux droites LM, MN seront en prolongement l'une de l'autre, et LN en sera la vraie somme. Cela montre évidemment que :

RÈGLE III. — *Si deux termes d'une équipollence trinôme ont des inclinaisons égales, l'autre terme (en* *supposant tous les termes transportés dans un même membre) aura une inclinaison qui différera de 180 degrés de celle des précédents, et sa longueur sera égale à la somme des longueurs des deux premiers termes.*

21. Pour terminer l'exposition de la méthode des équipollences, j'aurais à expliquer la signification et l'usage de deux autres signes; mais je crois opportun de donner auparavant quelques applications des principes exposés. Donnons d'abord un coup d'œil sur les théorèmes de Géométrie implicitement compris dans ces principes. Une des bases de la méthode des équipollences est l'égalité des angles à côtés parallèles. Il n'est donc pas étonnant qu'on puisse déduire de la méthode les théorèmes de la théorie des parallèles.

L'autre vérité fondamentale de la méthode des équipollences consiste dans la proportionnalité des figures semblables; par suite, on pourra tirer, des règles de cette méthode, les théorèmes sur la similitude ou l'égalité des triangles. Mais je ne m'arrête pas à cette sorte de cercle vicieux, d'après lequel on déduirait de la méthode les vérités mêmes qui ont servi à l'établir.

22. Notons néanmoins un exemple facile. Si un quadrilatère ABCD a les deux côtés opposés AB, DC égaux et parallèles, cela s'exprime par l'équipollence $AB \bumpeq DC$; et, en ajoutant BD aux deux membres, on a, par la règle I, $AD \bumpeq BC$, c'est-à-dire que les deux autres côtés sont aussi égaux et parallèles.

La condition pour que ABCD soit un parallélogramme, c'est-à-dire ait ses côtés opposés parallèles, est exprimée par les deux équipollences (4)

$$AB \bumpeq m\,DC, \quad AD \bumpeq n\,BC,$$

où les coefficients indéterminés m, n sont placés pour indiquer que les côtés opposés sont parallèles, mais que nous ne savons rien sur leurs longueurs. Au moyen de la règle I, nous réduirons tous les termes à contenir seulement AB, AC, AD :

$$\mathrm{AB} \bumpeq m\,\mathrm{AC} - m\,\mathrm{AD}, \quad \mathrm{AD} \bumpeq n\,\mathrm{AC} - n\,\mathrm{AB},$$

et, en éliminant AD,

$$\mathrm{AB} \bumpeq (m - mn)\,\mathrm{AC} + mn\,\mathrm{AB}.$$

Comme AB, AC ne sont pas parallèles, on aura, d'après la règle II,

$$1 - mn = 0, \quad m - mn = 0,$$

c'est-à-dire

$$m = 1, \quad n = 1;$$

d'où il résulte que les côtés opposés d'un parallélogramme sont non-seulement parallèles, mais aussi égaux.

23. Dans les principes développés jusqu'à présent ne figure pas l'égalité de deux triangles égaux dans toutes leurs parties, mais *symétriques* l'un par rapport à l'autre, c'est-à-dire tels, que l'un ne puisse se superposer à l'autre sans sortir de son propre plan, mais que cette superposition puisse se faire si on le *retourne,* en sorte que la face de son plan, qui était d'abord en dessous, vienne en dessus. De l'égalité de deux triangles *symétriques* dérive la propriété connue du triangle isoscèle; pour n'avoir pas néanmoins à recourir à ce théorème de Géométrie, il convient de l'introduire dans notre méthode par la règle suivante :

Règle IV. — *Si, en comparant les termes d'une équipollence trinôme aux termes de l'équipollence identique*

$LM + MN + NL \stackrel{\wedge}{=} 0$, *on reconnaît que*

$$\text{inc.}\,LM + \text{inc.}\,NL = 2\,\text{inc.}\,MN$$

(*les trois inclinaisons étant inégales*), *on aura*

$$\text{gr.}\,LM = \text{gr.}\,NL.$$

Réciproquement, si gr. $LM =$ gr. NL, *on aura*

$$\text{inc.}\,LM + \text{inc.}\,NL = 2\,\text{inc.}\,MN.$$

En effet, l'égalité des angles M, N d'un triangle LMN s'exprime, en prenant les deux angles avec le même signe (14), par $NML = LNM$, ou (15) par

$$\text{inc.}\,LM - \text{inc.}\,NM = \text{inc.}\,NM - \text{inc.}\,NL.$$

Applications.

24. Toute formule d'Algèbre identique exprime un théorème sur des quantités, lequel peut aussi être considéré comme un théorème relatif à plusieurs points situés en ligne droite. Telles sont les onze premières propositions du second livre d'Euclide. Je ne crois pas que, avant moi, on eût pensé à étendre tous ces théorèmes aux points d'un plan. Cela résulte du théorème ci-après, qui est une conséquence immédiate des principes de la méthode des équipollences; il présente un premier et remarquable exemple de l'usage de cette méthode pour arriver directement, et sans constructions géométriques, à un grand nombre de théorèmes qu'il ne serait pas facile d'établir autrement. Il est vrai que de tels théorèmes, dans toute leur généralité, sont trop compliqués pour mériter d'attirer l'attention, et, en les limitant à des cas simples et particuliers, on tombe sur des théorèmes déjà connus; car il est fort improbable qu'une vérité simple et élémentaire ait échappé aux recherches de tant de géomètres.

Théorème général. — *Toute propriété des points d'une droite donne un théorème relatif aux points d'un plan, par le seul changement des équations en équipollences.*

25. Prenons pour exemple la formule algébrique

$$b(b+2c)+c^2=(b+c)^2,$$

qui conduit à la sixième proposition du second livre d'Euclide : si une droite BD est divisée en C également, c'est-à-dire si BC = CD, et que A soit un point quelconque dans son prolongement, on aura

$$AB.AD+(BC)^2=(AC)^2.$$

Pour vérifier cette équation et s'assurer en même temps que les droites sont indiquées (2) dans le sens convenable (ce à quoi l'on ne prenait pas garde autrefois, mais ce qu'il est indispensable d'observer dans la méthode des équipollences), faisons les substitutions indiquées au n° 11, et observons si l'équation

$$(AZ-BZ)(AZ-DZ)+(BZ-CZ)^2=(AZ-CZ)^2$$

devient identique dans l'hypothèse BC = CD, c'est-à-dire BZ — CZ = CZ — DZ.

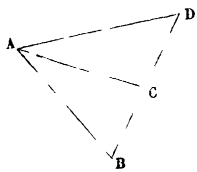
Après avoir fait cette vérification, nous avons le théorème suivant :

Si un côté BD *du triangle* ABD (*fig.* 5) *est divisé par le milieu en* C, *l'équipollence suivante aura toujours lieu*

$$AB.AD+(BC)^2+AC.CA \triangleq 0,$$

c'est-à-dire qu'on peut construire un triangle dont les côtés soient respectivement proportionnels aux produits AB.AD, (BC)², AC.CA, *et dont les inclinaisons* *soient respectivement* inc. AB + inc. AD, 2 inc. BC, inc. AC + inc. CA = 2 inc. AC ± 180°.

Fig. 5.



Ce théorème peut se démontrer aussi au moyen d'un autre calcul plus rapide : par hypothèse,

$$CD \bumpeq BC \bumpeq -CB,$$

et l'on a, par la règle I et le principe fondamental (10, 18),

$$AB.AD \bumpeq (AC + CB)(AC - CB) \bumpeq (AC)^2 - (CB)^2$$

ou

$$AB.AD + (CB)^2 - (AC)^2 \bumpeq 0.$$

Ce théorème, sous sa forme générale, présente peu d'utilité. Voyons-en quelques conséquences.

26. *Corollaire I*. — Si 2 inc. CB = 2 inc. AC ± 180°, les deux premiers termes de l'équipollence trinôme

$$(CB)^2 + AC.CA + AB.AD \bumpeq 0$$

auront la même inclinaison ; d'où, par la règle III,

$$\text{gr.}(AB.AD) = \text{gr.}(AC.CA) + \text{gr.}(CB)^2,$$

et, en outre,

$$\text{inc.} BA + \text{inc.} AD = 2\,\text{inc.} CB = 2\,\text{inc.} DB.$$

Cette dernière relation, appliquée à l'équipollence

$$BA + DB + AD \bumpeq 0,$$

donne, d'après la règle IV,

$$\text{gr.}\,AB = \text{gr.}\,AD.$$

La condition $\text{inc.}\,CB - \text{inc.}\,AC = \pm 90^\circ$ signifie que l'angle ACB est droit, et les deux équations relatives aux grandeurs donnent le théorème de Pythagore

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (CB)^2.$$

27. *Corollaire II.* — Si $\text{gr.}\,CB = \text{gr.}\,AC$, la règle IV, appliquée à l'équipollence identique $AC + BA + CB \bumpeq 0$, donne

$$\text{inc.}\,AC + \text{inc.}\,CB = 2\,\text{inc.}\,BA = 2\,\text{inc.}\,AB,$$

et, en l'appliquant à notre équipollence trinôme

$$(CB)^2 + AB.AD + AC.CA \bumpeq 0,$$

on a

$$2\,\text{inc.}\,CB + \text{inc.}\,AC + \text{inc.}\,CA = 2\,(\text{inc.}\,AB + \text{inc.}\,AD).$$

Prenant la moitié de cette équation et retranchant la précédente, on a

$$\tfrac{1}{2}\,\text{inc.}\,CA - \tfrac{1}{2}\,\text{inc.}\,AC = \text{inc.}\,AD - \text{inc.}\,AB.$$

Le premier membre [15, (1)] est égal à 90 degrés. Par suite :

Si $\text{gr.}\,CA = \text{gr.}\,CB = \text{gr.}\,CD$, *l'angle* BAD, *inscrit dans la demi-circonférence, est droit.*

28. On peut trouver que je m'arrête à des choses bien faciles et bien connues; mais, pour se servir d'une méthode, il est nécessaire de se la rendre familière. Je prie donc le lecteur de vouloir bien me suivre dans un petit nombre d'autres théorèmes, et de remarquer tous les passages avec la plus grande patience, au point de pouvoir

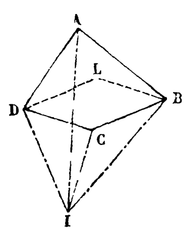
ensuite refaire par lui-même le chemin parcouru. De cette manière, il se verra en possession de la méthode, et, après cela, tout lui semblera facile. J'espère que l'on considérera comme intéressant de voir comment nous trouvons des théorèmes particuliers, en partant de celui du n° 24, au moyen d'un très-petit nombre de considérations géométriques, lesquelles, en outre, se présentent presque uniquement comme la traduction en langage ordinaire des conditions relatives aux angles, d'ailleurs parfaitement exprimées par les relations entre les inclinaisons.

29. La formule $bd + (b + d + i)\,i = (b + i)\,(i + d)$ nous apprend que, pour quatre points en ligne droite, on a

$$\mathrm{AB.ID} + \mathrm{AD.BI} \triangleq \mathrm{AI.BD};$$

ce qui peut se vérifier comme nous l'avons dit aux n^{os} 11 et 25. Par suite (24) :

Fig. 6.



Théorème. — *Pour tout quadrilatère* ABID (*fig.* 6) *a lieu l'équipollence*

$$\mathrm{AB.ID} + \mathrm{AD.BI} + \mathrm{AI.DB} \triangleq 0,$$

c'est-à-dire qu'on peut construire un triangle dont les côtés, respectivement proportionnels aux grandeurs de *ces produits, aient des inclinaisons égales aux inclinaisons de ces mêmes produits.*

Nous avons déjà dit (16) que

$$\text{inc.}(\text{AB.ID}) = \text{inc.AB} + \text{inc.ID, etc.}$$

30. Cette fois encore, nous obtiendrons des cas particuliers, en supposant que le triangle mentionné au théorème précédent devienne une ligne droite, ou un triangle rectangle, isoscèle ou équilatéral.

Corollaire I. — Si inc.(AB.ID) = inc.(AD.BI), la règle III donne

$$\text{gr.}(\text{AB.ID}) + \text{gr.}(\text{AD.BI}) = \text{gr.}(\text{AI.DB}).$$

Or (15)

$$\text{inc.AD} - \text{inc.AB} = \text{angle BAD},$$
$$\text{inc.IB} - \text{inc.ID} = \text{angle DIB};$$

par suite (15, 16), la condition précédente est identique à celle-ci :

$$\text{angle BAD} + \text{angle DIB} = 180^\circ,$$

et nous avons le théorème de Ptolémée : *Dans tout quadrilatère dont les angles opposés sont supplémentaires, le produit des diagonales est égal à la somme des deux produits des côtés opposés.*

31. *Corollaire II.* — Si, au lieu de cela, on a

$$\text{inc.}(\text{AB.ID}) - \text{inc.}(\text{AD.BI}) = \pm 90^\circ,$$

ou

$$\text{angle BAD} + \text{angle DIB} = \pm 90^\circ \pm 180^\circ,$$

le triangle exprimé par l'équipollence trinôme (29) est rectangle; par suite, le théorème de Pythagore (26) nous donne cet énoncé :

Si la somme des deux angles opposés d'un quadrilatère est égale à un ou à trois droits, le carré du produit des deux diagonales est égal à la somme des carrés des produits des côtés opposés.

32. *Corollaire III.* — Le triangle représenté par l'équipollence (29) est isoscèle lorsque

$$\text{gr.}(\text{AB}.\text{ID}) = \text{gr.}(\text{AD}.\text{BI});$$

alors la règle IV (23) donne la condition

$$\text{inc.}(\text{AB}.\text{ID}) + \text{inc.}(\text{AD}.\text{BI}) = 2\,\text{inc.}(\text{AI}.\text{DB}),$$

laquelle se réduit, de diverses manières, à une relation d'angles (15). En la développant sous la forme

$$\begin{aligned}&\text{inc.AI} - \text{inc.AB} + \text{inc.BD} - \text{inc.BI} + \text{inc.IA}\\ &\qquad - \text{inc.ID} + \text{inc.DB} - \text{inc.DA} = 180^\circ,\end{aligned}$$

on a ce théorème :

Si le produit de deux côtés opposés AB, ID *est égal au produit des deux autres* BI, DA, *la somme des angles* BAI, IBD, DIA, ADB, *successivement compris entre les diagonales et les côtés, est égale à deux droits.*

33. *Corollaire IV.* — Le triangle de l'équipollence trinôme (29) sera équilatéral s'il a deux angles égaux à 60 degrés, c'est-à-dire si deux des équations suivantes ont lieu :

$$\begin{aligned}&\text{inc.AD} - \text{inc.AB} + \text{inc.IB} - \text{inc.ID} = \pm 60^\circ,\\ &\text{inc.AI} - \text{inc.AB} + \text{inc.DB} - \text{inc.DI} = \mp 60^\circ,\\ &\text{inc.AD} - \text{inc.AI} + \text{inc.BI} - \text{inc.BD} = \mp 60^\circ.\end{aligned}$$

Ici encore, si l'on veut les réduire à des relations entre les angles, il faudra faire attention aux signes, soin qui ne serait pas nécessaire si l'on s'en tenait aux précédentes relations.

En supposant le quadrilatère de forme ordinaire, à angles saillants, nous avons ce théorème : *Si deux angles opposés d'un quadrilatère* ABID *ont une somme de* 60 *degrés, qui soit en même temps la différence d'un des quatre couples d'angles* BAI, BDI, DBA, DIA, IAD, IBD, ADB, AIB, *le produit des diagonales est égal à chacun des produits des côtés opposés.*

34. *Corollaire V.* — Si, aux conditions du corollaire précédent, on ajoute que les trois points B, I, D sont en ligne droite, de sorte que gr. BI + gr. ID = gr. BD, la deuxième et la troisième relation du n° 33 deviendront

$$\text{inc. AI} - \text{inc. AB} = \mp 60^\circ,$$
$$\text{inc. AD} - \text{inc. AI} = \mp 60^\circ.$$

Par suite : *Si les trois droites* AB, AI, AD, *formant entre elles des angles de* 60 *degrés, sont coupées par une droite quelconque* BID, *on aura*

$$\text{gr.}(\text{AB.ID}) = \text{gr.}(\text{AD.BI}) = \text{gr.}(\text{AI.DB}).$$

Et, de même que $\frac{1}{2}$ BD est moyenne arithmétique entre ID et BI, de même 2 AI est la longueur qu'on appelle *moyenne harmonique* entre les deux droites AB, AD.

35. Comme dernier exemple du n° 24, nous allons donner un théorème qui comprend celui du n° 25. Entre quatre points d'une droite, et aussi d'un plan, on a

$$\text{AB.AD} + \text{BC.CD} \simeq \text{AC}(\text{AB} + \text{CD});$$

ce qu'il est facile de vérifier d'après la manière habituelle (11).

Menant la droite BL $\triangleq$ CD (*fig.* 6), on a, d'après la règle I,

$$AB + CD \triangleq AB + BL \triangleq AL.$$

Par conséquent,

Théorème. — *Si* BL *est équipollent à* CD, *l'équipollence suivante a lieu*

$$AB.AD + BC.CD + AC.LA \triangleq 0.$$

36. *Corollaire.* — Si inc.(BC.CD) = inc.(AC.LA), la règle III nous donne

$$\text{gr.}(AB.AD) = \text{gr.}(BC.CD) + \text{gr.}(AC.LA),$$

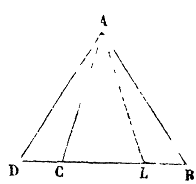
et, en outre,

$$\text{inc.}(AB.AD) = 180^\circ + \text{inc.}(BC.CD)$$

ou

$$\text{inc.}BA + \text{inc.}AD = \text{inc.}BC + \text{inc.}CD.$$

Fig. 7.



Si nous nous limitons au cas particulier (*fig.* 7) où BCD est une ligne droite, et si, par suite,

$$\text{inc.}BC = \text{inc.}CD = \text{inc.}BD,$$

la relation précédente

$$\text{inc.}BA + \text{inc.}AD = 2\,\text{inc.}BD$$

donnera, d'après la règle IV,

$$\text{gr.}AB = \text{gr.}AD.$$

Semblablement, l'égalité

$$\text{inc.}\,AC + \text{inc.}\,LA = \text{inc.}\,BC + \text{inc.}\,CD = 2\,\text{inc.}\,CL$$

donnera

$$\text{gr.}\,AC = \text{gr.}\,AL.$$

Donc : *Si le point* L *de la base du triangle* ACB *est à une distance du sommet égale à* AC, *on aura*

$$(AB)^2 = (BC.BL) + (AC)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 - (BC.CL).$$

37. Nous avons voulu tirer toutes ces conséquences des seuls principes de la méthode des équipollences. Du reste, il eût été facile de remarquer que l'hypothèse (36)

$$2\,\text{inc.}\,BC = \text{inc.}\,BA + \text{inc.}\,AD = \text{inc.}\,AC + \text{inc.}\,LA$$

entraîne cette conséquence, que les deux triangles ABD, ACL sont isoscèles. On le voit promptement en supposant qu'on ait inc. BC = o, c'est-à-dire que la droite BC soit prise (13) pour origine des inclinaisons; en sorte que les droites BA, AD (et pareillement AC, LA) aient des inclinaisons égales, mais de signes contraires.

38. Revenant au théorème général (*fig.* 6), construisons (16) $AI \triangleq AB.AD : AL$. L'équipollence du n° 35, divisée par AL, prendra la forme

$$AI + BC.CD : AL - AC \triangleq o,$$

ou, d'après la règle I,

$$CI \triangleq CB.CD : AL \triangleq CB.BL : AL.$$

Les précédentes équipollences

$$AI : AB \triangleq AD : AL,$$

$$CI : LB \triangleq CB : LA$$

expriment que le triangle IAD est directement semblable au triangle BAL, lequel est lui-même directement semblable à IBC.

Dans la méthode des équipollences, il est nécessaire de distinguer les figures directement semblables des figures symétriquement semblables. Les premières sont celles qui, sans renversement (23) et seulement par un mouvement dans le plan qui les contient, peuvent être rendues homothétiques, c'est-à-dire telles, que leurs côtés homologues soient parallèles. Pour indiquer des figures semblables, nous aurons toujours l'attention de prendre les lettres dans le même ordre; si bien que, en disant que IAD est semblable à BAL, nous entendons que le sommet I est homologue de B, A homologue de A, et D homologue de L.

Les mêmes équipollences

$$\mathrm{AI} : \mathrm{AD} \mathrel{\stackrel{\wedge}{=}} \mathrm{AB} : \mathrm{AL},$$

$$\mathrm{CI} : \mathrm{LD} \mathrel{\stackrel{\wedge}{=}} \mathrm{CD} : \mathrm{LA}$$

nous montrent que les trois autres triangles IAB, DAL, IDC sont en même temps directement semblables.

La dépendance entre ces similitudes pourrait aussi être démontrée par les considérations ordinaires de la Géométrie élémentaire; la méthode des équipollences indique, du reste, le chemin à suivre pour démontrer, au moyen de la Géométrie synthétique, les théorèmes trouvés par le secours de cette méthode.

En supposant que BCD soit une ligne droite, ou un triangle rectangle, isoscèle ou équilatéral, on pourra, par exemple, démontrer de la sorte les corollaires des nos 30, 31, 32, 33.

39. *A tout quadrilatère* ABCD *non parallélogramme correspond un point remarquable* I, *qui est le sommet*

commun des triangles directement semblables ADI, BCI, *ou* ABI, DCI, *ayant pour bases deux côtés opposés du quadrilatère.*

Nous pouvons imaginer que AD, BC soient deux droites correspondantes de deux figures directement semblables, et I sera l'unique point de ces deux figures se correspondant à lui-même. Nous sommes donc conduits au problème suivant :

40. Problème. — *Trouver le sommet commun de deux triangles directement semblables de bases données.*

La similitude des triangles ADI, BCI (*fig.* 6) est complétement exprimée (16) par l'équipollence

$$AD : BC \triangleq AI : BI,$$

laquelle nous servira à déterminer le point inconnu I. Celui-ci entre dans deux droites; mais nous le réduirons à n'entrer que dans une seule, en remarquant que l'on a, d'après la règle I,

$$BI \triangleq AI - AB.$$

D'après cela, l'équipollence se résoudra (18) par rapport à l'inconnue AI, et donnera

$$BC.AI \triangleq AD.AI - AD.AB,$$

$$AI \triangleq AD.AB : (AD - BC).$$

Pour construire la droite AD — BC, on trace (5) DL $\triangleq$ CB, si bien que

$$AD - BC \triangleq AD + DL \triangleq AL.$$

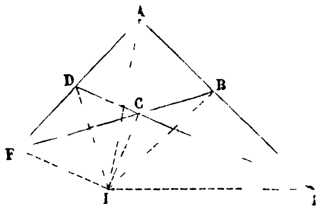
Alors l'équipollence

$$AI \triangleq AD.AB : AL$$

donnera (16) la grandeur et l'inclinaison de AI. Il est évident que tout se réduit à construire le triangle ABI directement semblable à ALD.

41. Pour s'habituer à l'algorithme de la méthode et reconnaître les ressources que présentent ses principes, peu nombreux d'ailleurs, il est nécessaire de varier la nature des questions. Cherchons suivant quelles relations une droite quelconque DCE (*fig.* 8) coupe les côtés

Fig. 8.



d'un triangle ABF. La condition que le point E se trouve sur la droite AB est exprimée (4) par

$$AE \mathrel{\underline{\frown}} zAB,$$

z étant un coefficient numérique.

Nous avons également

$$BC \mathrel{\underline{\frown}} xBF,$$

$$AD \mathrel{\underline{\frown}} yAF.$$

Enfin, pour exprimer la condition que DCE soit une ligne droite, c'est-à-dire que DC ait la même inclinaison que DE, nous poserons

$$mDE \mathrel{\underline{\frown}} DC.$$

Au moyen des équipollences précédentes, et par l'application de la règle I, nous éliminons les points D, C, E, et nous obtenons l'équipollence

$$m\,(z\,\mathrm{AB} - y\,\mathrm{AF}) \bumpeq \mathrm{AC} - \mathrm{AD} \bumpeq \mathrm{AB} + x\,\mathrm{BF} - y\,\mathrm{AF}.$$

Pour appliquer la règle II, nous réduirons tous les termes à ne contenir que les deux droites non parallèles AB, AF, et nous aurons

$$m(z\,\mathrm{AB} - y\,\mathrm{AF}) \bumpeq (x - y)\,\mathrm{AF} + (1 - x)\,\mathrm{AB}.$$

De là (19)

$$mz = 1 - x, \quad my = y - x.$$

Enfin, par l'élimination de m, nous obtenons la relation cherchée

$$yz - xz - y + xy = 0,$$

qui aurait pris une forme plus symétrique par un meilleur choix des premières données.

Elle peut s'écrire

$$zx(y - 1) = (z - 1)(x - 1)y,$$

et nous donne l'*involution* connue

$$\mathrm{AE.BC.FD} \bumpeq \mathrm{BE.FC.AD},$$

dans laquelle figure le signe $\bumpeq$ au lieu du signe $=$, parce qu'elle subsiste non-seulement quant aux grandeurs, mais aussi quant aux inclinaisons.

(*A suivre.*)