Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 137-144

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__137_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1097

(voir 2e série, t. XI, p. 479);

PAR M. AUGUSTE MOREL,
Répétiteur à Sainte-Barbe.

Joignons deux points quelconques E, F *d'une circonférence à un point* O *pris arbitrairement sur le prolongement d'un rayon* CA *de cette circonférence. Désignons par* E', F' *les points de rencontre de ces droites avec la circonférence. Élevons aux points* E, F *des droites respectivement perpendiculaires à* EO, FO; *appelons* I *le point de rencontre de ces perpendicu-*

laires. On demande de démontrer que l'angle IOC *a pour mesure la demi-somme ou la demi-différence des arcs* E′A, F′A. (MANNHEIM.)

Pour le démontrer, je joins le point E au point F, le point E′ au point F′ (*). Les quatre points I, E, F, O sont sur une même circonférence, et par suite les angles IEF, IOF sont égaux (ou supplémentaires). Il en résulte que l'angle FEO est le complément de l'angle IOF; mais, dans le quadrilatère inscrit EFF′E′, l'angle FEO est égal à l'angle OF′E′. Donc, les angles OF′E′ et IOF étant complémentaires, la ligne F′E′ est perpendiculaire à IO.

Si j'appelle M et N les points où les perpendiculaires menées par les points E et F rencontrent la circonférence, je démontrerai de même que MN est perpendiculaire à IO, et par suite parallèle à F′E′.

Je dis de plus que les cordes F′E′ et MN sont égales. En effet, supposons, pour fixer les idées, que le point I soit extérieur à la circonférence, et que l'angle EIF soit égal à l'angle EOF. Il en résultera que l'arc MN sera égal à l'arc F′E′ (**).

Il résulte de là que la figure E′F′MN est un rectangle, et que E′N est parallèle à OI, la ligne F′N étant un diamètre, ce que, du reste, on aurait pu voir immédiatement. Par suite, si je prolonge le rayon OC jusqu'au point A′, où il rencontre la circonférence, l'arc A′N est égal à l'arc AF′.

Deux cas peuvent alors se présenter : si les points E et F sont d'un même côté du diamètre AA′, il en sera de même des points E′ et F′, et par suite les points E′ et N seront de part et d'autre de ce diamètre. Donc la ligne

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

(**) Si le point I était intérieur, il est facile de voir que l'angle EIF serait le supplément de l'angle en O et l'on en déduirait aussi facilement que l'arc MN est égal à E′F′.

E′N rencontrera le diamètre en un point L intérieur à la circonférence, et par suite l'angle CLN, ou son égal COI, aura pour mesure la demi-somme des arcs A′N et AE′.

Si E et F sont de côtés différents du diamètre AA′, les points E′ et N seront d'un même côté de ce diamètre; l'angle CLN sera extérieur, et par suite aura pour mesure la demi-différence des arcs A′ et AF′.

Remarque. — Le même théorème subsiste lorsque le point O est intérieur au cercle; on le démontrerait exactement de la même manière.

Note. — La même question a été résolue par MM. S. Jouhanneau et V. Jamet, élèves du lycée de Bordeaux; Pellissier; Louis Goulin, élève du lycée du Havre; Lez et Brocard.

Question 1100

(voir 2ᵉ série, t. XI, p. 480);

PAR M. GAMBEY,
Professeur au lycée de Saint-Étienne.

De toutes les ellipses inscrites dans un triangle donné ABC, *celle dont la surface est la plus grande est équivalente au cercle inscrit dans un triangle équilatéral équivalent au triangle proposé.*

Si, du centre de cette ellipse, on mène des droites aux centres des cercles inscrits dans les deux triangles équilatéraux construits sur l'un quelconque des trois côtés du triangle proposé, ces droites seront respectivement égales à la demi-somme et à la demi-différence des axes de l'ellipse, et les axes de l'ellipse seront dirigés suivant les bissectrices des angles formés par ces droites.

(G.)

Prenons pour axes de coordonnées AB et AC et posons

$$AB = a, \quad AC = b.$$

L'équation de la conique inscrite dans ce triangle sera

$$l^2x^2 + m^2y^2 + n^2\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2$$
$$- 2lmxy - 2lnx\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) - 2mny\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) = 0,$$

l, m et n étant des constantes indéterminées.

Posons

$$\frac{l}{n} = \lambda, \quad \frac{m}{n} = \mu,$$

$$\lambda - \frac{1}{a} = p, \quad \mu - \frac{1}{b} = q, \quad \mu + \frac{1}{b} = r;$$

l'équation devient, après avoir été développée,

$$p^2x^2 - 2\left(\frac{q}{a} + r\lambda\right)xy + q^2y^2 + 2px + 2qy + 1 = 0.$$

Or, l'équation générale d'une ellipse étant

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

son aire est représentée par l'expression

$$2\pi \sin\theta \frac{AE^2 + CD^2 - BDE - F(4AC - B^2)}{\pm(4AC - B^2)^{\frac{3}{2}}},$$

θ étant l'angle des axes. Il faut prendre le signe de manière à rendre l'aire positive.

La substitution donne, pour l'aire de l'ellipse inscrite dans le triangle proposé,

$$\frac{\pi \sin\theta \left(pq + \frac{q}{a} + \lambda r\right)^2}{\left[p^2q^2 - \left(\frac{q}{a} + \lambda r\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi \sin\theta\, ab\sqrt{ab\lambda\mu}}{2(1 - a\lambda - b\mu)^{\frac{3}{2}}}.$$

Il suffit de chercher les conditions du maximum de

$$\frac{\sqrt{\lambda\mu}}{(1 - a\lambda - b\mu)^{\frac{3}{2}}},$$

ou, mieux, celles de son carré.

Comme λ et μ sont deux variables indépendantes, il faut égaler séparément à zéro les dérivées de cette expression par rapport à λ et par rapport à μ.

On est ainsi conduit à

$$a\lambda + 1 = 0, \quad b\mu + 1 = 0.$$

L'aire maximum est donc égale à $\dfrac{\pi ab}{6\sqrt{3}} \sin\theta$.

Soit c le côté du triangle équilatéral équivalent à ABC; son aire est égale à $\dfrac{c^2}{4}\sqrt{3}$, et celle du cercle inscrit à $\dfrac{\pi c^2}{12}$.

Or, si l'on pose

$$\frac{ab \sin\theta}{2} = \frac{c^2}{4}\sqrt{3},$$

on en déduit

$$\frac{\pi c^2}{12} = \frac{\pi ab \sin\theta}{6\sqrt{3}}.$$

On s'assure aisément que l'ellipse maximum a pour centre le point de concours des médianes et touche les côtés du triangle en leurs milieux.

Soient :

O le centre de l'ellipse;

O_1 et O_2 ceux des cercles inscrits dans les triangles équilatéraux construits sur AB, O_1 étant intérieur au triangle ABC;

I le point milieu de AB;

OH une parallèle à AB;

on trouve facilement que

$$\overline{OO_1}^2 = \frac{a^2 + b^2 - ab(\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta)}{9},$$

$$\overline{OO_2}^2 = \frac{a^2 + b^2 - ab(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta)}{9},$$

d'où

$$\overline{OO_2}^2 - \overline{OO_1}^2 = \frac{2ab\sqrt{3}\sin\theta}{9} = \frac{2ab\sin\theta}{3\sqrt{3}};$$

mais, si a_1 et b_1 sont les demi-axes de l'ellipse, on doit avoir aussi

$$4a_1b_1 = \frac{2ab\sin\theta}{3\sqrt{3}};$$

donc

$$\overline{OO_2}^2 - \overline{OO_1}^2 = 4a_1b_1 = (a_1 + b_1)^2 - (a_1 - b_1)^2,$$

c'est-à-dire

$$OO_2 = a_1 + b_1, \quad OO_1 = a_1 + b_1.$$

Calculons maintenant la longueur du diamètre conjugué de OI, lequel est dirigé suivant OH. Nous trouverons facilement qu'il a pour valeur $\frac{a}{2\sqrt{3}}$ c'est-à-dire qu'il est égal au rayon du cercle inscrit dans le triangle équilatéral, ou à la moitié de la distance O_1O_2. On retrouve ainsi la construction par laquelle, connaissant deux diamètres conjugués d'une ellipse et l'angle qu'ils font entre eux, on construit les axes de cette ellipse. Les bissectrices des angles formés par les droites OO_1, OO_2 sont donc bien les directions des axes.

Note. — La même question a été résolue par MM. Pellissier; A. Tourrettes, surveillant géneral au lycée d'Albi, et Brocard.

Solution géométrique de la même question;

Par M. MORET-BLANC.

On sait que l'ellipse maximum inscrite dans un triangle touche les côtés en leurs milieux; la figure formée par le triangle proposé et l'ellipse maximum inscrite peut donc être considérée comme la projection d'un cercle touchant en leurs milieux les côtés du triangle circonscrit, qui, par conséquent, est équilatéral.

Soient C et T les aires du cercle et du triangle équilatéral circonscrit, u l'angle de leur plan avec celui du triangle ABC; les aires de l'ellipse et du triangle ABC seront respectivement $C\cos\omega$ et $T\cos\omega$; mais $C\cos\omega$ est aussi l'aire du cercle inscrit dans le triangle équilatéral d'aire $T\cos\omega$, ce qui démontre la première partie du théorème.

Le demi-diamètre de l'ellipse parallèle à l'un des côtés du triangle circonscrit est à ce côté comme les lignes parallèles dont ils sont les projections, c'est-à-dire comme le rayon d'un cercle est au côté du triangle équilatéral circonscrit : il est donc égal au rayon du cercle inscrit dans le triangle équilatéral construit sur ce côté du triangle donné.

Cela posé, la construction indiquée dans l'énoncé n'est autre que celle qui sert à trouver les axes d'une ellipse dont on donne deux diamètres conjugués.

Question 1110

(voir 2ᵉ série, t. XII, p. 96),

PAR M. DEMARTRES,

Professeur au collège de Valenciennes.

On construit, dans le cercle trigonométrique, l'arc $2a = AC$, $\sin 2a = CP$, *le point* P' *symétrique de* P *par rapport à* OC, D *milieu de la corde* AC *et les droites* P'D, P'P. *Prouver que l'on a, aux signes près,*

$$P'D = \sin 3a, \quad PP' = \sin 4a.$$

Si l'on construit $\cos 2a = CR$, R' *symétrique de* R *par rapport à* OC, *on aura, aux signes près,*

$$R'D = \cos 3a, \quad P'R = \cos 4a.$$

Décrivons un cercle sur OC comme diamètre (*), nous obtiendrons immédiatement les points P, D, R, et nous en déduirons sans peine P'R'; on voit immédiatement :

1° Que PP' sous-tend, dans le cercle de rayon un demi, l'arc $PCP' = 4 \operatorname{arc} CD$; or, si les arcs CD, CA se correspondent dans les deux cercles, on en conclut que PP' est la moitié de la corde qui sous-tendrait 4 arcs CA ou $8a$ dans le cercle primitif; c'est donc le sinus de $4a$; donc

$$PP' = \sin 4a;$$

2° Que DP' sous-tend un arc $= 3CD$; donc, d'après le même raisonnement,

$$P'D = \sin 3a;$$

3° Que P'R est parallèle à OC, à cause de l'égalité

$$CR = PO' = PO = \cos 2a;$$

on en conclut que RR'PP' est un rectangle dont les diagonales sont des diamètres du petit cercle; donc :

4° Le triangle RP'P est rectangle, et a pour hypoténuse 1; donc si $PP' = \sin 4a$, on en conclut

$$RP' = \cos 4a;$$

5° Le triangle P'DR est aussi rectangle, et son hypoténuse est 1; comme $P'D = \cos 3a$, on en déduit

$$P'R = \cos 3a.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Édouard Laurens, à Rouen; Louis Cauret, au Mans; Gambey, professeur au lycée de Saint-Étienne; Auguste Morel, professeur à Sainte-Barbe; V. Liguine, professeur à l'Université d'Odessa; M. Ellie, professeur au collége de Blois; E. Kruschwitz, à Berlin; P. Vannetelle, élève du lycée de Reims; Pierre Arnould, élève du collége Stanislas; Charles Zagner, assistant à l'École Polytechnique de Vienne.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.