A. de Saint-Germain

Détermination des éléments infinitésimaux relatifs aux lignes à double courbure

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 126-131

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__126_1>

DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS INFINITÉSIMAUX RELATIFS AUX LIGNES A DOUBLE COURBURE;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

L'expression des coordonnées des points d'une courbe gauche, en séries ordonnées suivant les puissances de l'arc, a permis de calculer avec élégance plusieurs des quantités qui se rapportent aux deux courbures des lignes. Je me propose de montrer combien l'emploi régulier de ces séries facilite le calcul de tous ces éléments, tels que le rayon de torsion, et permet d'établir simplement certaines propriétés infinitésimales dont la démonstration géométrique est délicate. Les lecteurs des *Annales* pourront remarquer l'expression de la distance d'une courbe à sa sphère osculatrice : il y a eu ici même sur cette expression un débat entre MM. Ruchonnet et Gilbert (mai et août 1872); or je retrouve par un procédé tout différent du sien le résultat de M. Ruchonnet.

I. Je suppose connues les équations de la tangente, du plan osculateur et de la normale principale ; il est inutile de les rappeler. Mais j'écris dès à présent, pour les employer plus tard, des résultats qu'on n'établit pas ordinairement dans le cas particulier que j'envisagerai. Étant donnée la droite

$$\frac{X-x}{a}=\frac{Y-y}{b}=\frac{Z-z}{c},$$

sa perpendiculaire commune avec l'axe des x a pour équations

$$bY+cZ=0, \quad (b^2+c^2)(X-x)+a(by+cz)=0,$$

et pour longueur

$$\pm\frac{cy-bz}{\sqrt{b^2+c^2}}.$$

II. Établissons aussi maintenant, pour ne pas interrompre notre étude géométrique, un théorème relatif aux changements d'axes coordonnés. Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque d'une courbe, s l'arc compté entre ce point et un point fixe de la courbe ; la somme

$$\left(\frac{d^nx}{ds^n}\right)^2+\left(\frac{d^ny}{ds^n}\right)^2+\left(\frac{d^nz}{ds^n}\right)^2=\sum\left(\frac{d^nx}{ds^n}\right)^2$$

conserve une valeur constante pour chaque point, quand on prend d'autres axes, pourvu qu'ils soient aussi rectangulaires. En effet, les coordonnées primitives x, y, z sont liées aux nouvelles x', y', z' par des équations de la forme

$$x=x_1+ax'+a'y'+a''z',\ldots;$$

on différentie n fois les deux membres par rapport à s, qui est indifférent au choix des axes, puis on élève au carré, et on ajoute les trois équations analogues; en tenant compte des relations connues qui existent entre les neuf cosinus a, a', a'',..., on obtient

$$\sum\left(\frac{d^n x}{ds^n}\right)^2 = \sum\left(\frac{d^n x'}{ds^n}\right)^2.$$

III. Cela posé, je prends pour axe des x la tangente en un point O, pour axe des y la portion de la normale principale qui est dirigée dans la concavité de la courbe; le plan des xy est donc osculateur en O; l'axe des z lui sera dirigé perpendiculairement, et du même côté que la partie de la courbe qui va dans le sens des x positifs. Je choisis pour variable indépendante la longueur s de l'arc compté à partir de l'origine.

Soit M un point de la courbe, qui sera le plus souvent infiniment voisin de O, en prenant alors s pour infiniment petit principal. J'appelle α, β, γ les angles de la tangente avec les axes, λ, μ, ν ceux de la normale principale, ξ, υ, ζ ceux de l'axe du plan osculateur.

A moins que le point O ne soit un point singulier, pour lequel les résultats ultérieurs seraient d'ailleurs en défaut, on pourra développer, par la formule de Maclaurin, les coordonnées d'un point quelconque de la courbe en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de s. Pour abréger, je supprime tout de suite quelques-uns des premiers termes de ces séries, dont l'absence est aisée à justifier, et j'écris les formules

$$(1)\qquad \begin{cases} x = s + a_3 s^3 + a_4 s^4 + \ldots, \\ y = b_2 s^2 + b_3 s^3 + b_4 s^4 + \ldots, \\ z = c_3 s^3 + c_4 s^4 + \ldots. \end{cases}$$

Les coefficients de ces séries ne sont pas indépendants les uns des autres; on sait que l'on a

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = \cos\alpha = 1 + 3a_3 s^2 + 4a_4 s^3 + \ldots, \\ \dfrac{dy}{ds} = \cos\beta = 2b_2 s + 3b_3 s^2 + 4b_4 s^3 + \ldots, \\ \dfrac{dz}{ds} = \cos\gamma = 3c_3 s^2 + 4c_4 s^3 + \ldots. \end{cases}$$

La somme des carrés de ces expressions est égale à 1 quel que soit s; il faut donc que les coefficients des diverses puissances de cette variable soient nuls; d'où les relations

$$(3)\qquad a_3 = -\frac{2}{3} b_2^2, \quad a_4 = -\frac{3}{2} b_2 b_3, \ldots.$$

IV. Évaluons les deux rayons de courbure au point O en fonction des coefficients des séries (1).

L'angle de contingence de l'arc infiniment petit OM est α. Mais l'équation (2) $\cos\gamma$ renferme s^2 en facteur : le complément de γ, c'est-à-dire l'angle de la tangente en M avec le plan osculateur en O est infiniment petit du deuxième ordre. En négligeant les quantités de cet ordre, on peut regarder γ comme égal à $\frac{\pi}{2}$, et $\cos\beta$ comme égal à $\sin\alpha$ ou même à α; d'où

$$\alpha = \cos\beta = 2b_2 s + \ldots.$$

Le rayon de première courbure en O est donc

$$(4)\qquad R_0 = \lim \frac{s}{\alpha} = \frac{1}{2b_2}.$$

L'angle de torsion de l'arc OM est l'angle ζ du plan osculateur en M avec le plan des xy. Or, quand s est la variable indépendante, l'équation générale du plan osculateur peut s'écrire

$$\sum \left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right)(\mathrm{X} - x) = 0.$$

Je calcule les dérivées au moyen des séries (1), je remplace a_3 par sa valeur (3), je néglige les termes en s^3, et j'ai pour l'équation du plan osculateur en un point x, y, z de notre courbe

$$(5)\quad 3b_2c_3s^2\mathrm{X} - 3(c_3s + 2c_4s^2)\mathrm{Y} + [b_2 + 3b_3s + (6b_4 + 2b_2^3)s^2]\mathrm{Z} = 0.$$

Tout d'abord cette équation nous démontre deux théorèmes dont la démonstration géométrique est délicate (*voir* le *Calcul différentiel* de M. Bertrand). Pour avoir l'intersection du plan osculateur correspondant à $s = 0$ avec le plan, ou les deux plans infiniment voisins, on sait qu'il faut égaler à zéro le terme indépendant de s, et le coefficient de s dans le premier cas, et en outre les coefficients de s^2, dans le second. On trouve ainsi pour le premier cas $\mathrm{Z} = 0, \mathrm{Y} = 0$, et pour le second $\mathrm{Z} = \mathrm{Y} = \mathrm{X} = 0$. Donc :

La limite de l'intersection de deux plans osculateurs infiniment voisins est la tangente menée par le point de contact de celui qui reste fixe, en sorte qu'une courbe gauche est l'arête de rebroussement de l'enveloppe de ses plans osculateurs.

La limite de l'intersection de trois plans osculateurs voisins est le point de contact de l'un d'eux.

Mais le premier théorème nous donne l'angle de torsion cherché. Puisque le plan osculateur en M peut être considéré comme passant par l'axe des x tangent en O, son inclinaison sur le plan des xy est l'angle de sa trace sur le plan des yz et de l'axe des y ; elle est mesurée par la limite du rapport $\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Y}}$ tirée de l'équation (5), en y faisant $X = 0$; donc

$$\zeta = \lim \frac{Z}{Y} = \frac{3 c_3 s}{b_2}.$$

Le rayon de la seconde courbure en O devient, en tirant d'ailleurs la valeur de b_2 de l'équation (4),

$$(6) \qquad r_0 = \lim \frac{s}{\zeta} = \frac{b^2}{3 c_3} = \frac{1}{6 R_0 c_3}.$$

(*A suivre.*)