NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

SAINT-LOUP

Du rayon de courbure d'une courbe décrite par un point d'une figure mobile

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 113-126

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__113_1>

DU RAYON DE COURBURE D'UNE COURBE DÉCRITE PAR UN POINT D'UNE FIGURE MOBILE;

PAR M. SAINT-LOUP,
Professeur à la Faculté de Besançon.

Lorsqu'une figure invariable se déplace dans un plan, on sait que ce mouvement peut être produit par le roulement d'une certaine courbe ou roulette liée à la figure mobile sur une autre courbe qu'on nomme la base de la roulette, et l'on démontre que, si R_1 et R_2 sont les rayons de courbure de ces deux courbes à leur point de contact, le rayon de courbure A de la courbe décrite par un point A quelconque du plan de la roulette est donné par la relation

$$(1) \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{A - a} = \frac{1}{R_1 \cos\theta} + \frac{1}{R_2 \cos\theta},$$

qui conduit à la construction de Savary.

Dans cette formule, a désigne la distance du point mobile A au point de contact O, et θ l'angle de a avec la normale en ce point à la roulette.

Le but de cette Note est de donner la solution de la question suivante :

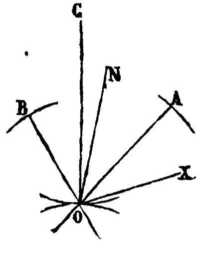
Une courbe étant donnée dans le plan d'une figure mobile, celle-ci reste constamment tangente à deux courbes fixes; déterminer le rayon de courbure de l'enveloppe de la première courbe en fonction des rayons de courbure des courbes données aux points où elles se touchent.

Pour cela, traitons d'abord cet autre problème plus simple :

Trouver le rayon de courbure de la trajectoire d'un point C *du plan d'une figure invariable dont deux points* A *et* B *décrivent des courbes données, en fonction des rayons de courbure en* A *et* B *des deux directrices.*

1. Menons en A et B les normales aux deux directrices, ces normales se rencontrent en un point O qui est le point de contact de la roulette qui produirait le mouvement de AB, avec la base sur laquelle s'effectuerait le roulement.

Fig. 1.



lement. On sait que la normale à la trajectoire du point C passe aussi en O. Soient ON la normale commune aux courbes de roulement et OX une direction quelconque, $\alpha, \beta, \gamma, \nu$ les angles de OA, OB, OC, ON avec OX. D'après la formule rappelée plus haut, on a

$$(2) \qquad \cos(\nu - \alpha)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{A - a}\right) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2};$$

la considération des points B et C donnerait lieu à des relations analogues. Il résulte de là que

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} &\cos(\nu - \alpha)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{A - a}\right)\\ &= \cos(\nu - \beta)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{B - b}\right)\\ &= \cos(\nu - \gamma)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{C - c}\right), \end{aligned}\right.$$

équations qui renferment comme inconnues ν et C; éliminons ν, on a, en développant les cosinus dans la première équation,

$$(4) \qquad \operatorname{tang}\nu = \frac{\dfrac{A\cos\alpha}{a(A - a)} - \dfrac{B\cos\beta}{b(B - b)}}{\dfrac{A\sin\alpha}{a(A - a)} - \dfrac{B\sin\beta}{b(B - b)}}.$$

La seconde équation donnerait pour tang ν une expression analogue; en les égalant, il vient

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} &a\left(1 - \frac{a}{A}\right)\sin(\beta - \gamma)\\ &+ b\left(1 - \frac{b}{B}\right)\sin(\gamma - \alpha)\\ &+ c\left(1 - \frac{c}{C}\right)\sin(\alpha - \beta) = 0: \end{aligned}\right.$$

c'est la relation cherchée.

Les signes des différences $\beta - \gamma$, $\gamma - \alpha$, $\alpha - \beta$ sont définis par la figure. $A - a$, $B - b$, $C - c$ sont positifs quand les rayons de courbure A, B, C sont supérieurs aux distances a, b, c et dirigés du même côté que le point O par rapport aux points A, B, C.

2. Prenons

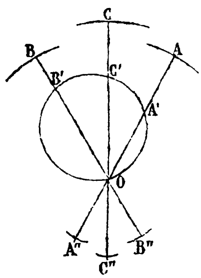
$$AA' = \frac{a^2}{A}, \quad BB' = \frac{b^2}{B}, \quad CC' = \frac{c^2}{C};$$

l'équation (5) peut s'écrire

$$(6)\quad OA' \sin(\beta - \gamma) + OB' \sin(\gamma - \alpha) + OC' \sin(\alpha - \beta) = 0.$$

Or, si par un point O d'une circonférence on mène trois droites OA', OB', OC' terminées à la circonférence, ces

Fig. 2.



droites représentent les cosinus des angles α, β, γ qu'elles font avec le diamètre mené par le point O, et on a l'identité

$$\cos\alpha \sin(\beta - \gamma) + \cos\beta \sin(\gamma - \alpha) + \cos\gamma \sin(\alpha - \beta) = 0,$$

comme on peut s'en assurer en développant; donc la relation (6) exprime que les trois points A', B', C' sont sur un même cercle passant par le point O. La construction de deux de ces points A' et B' déterminera donc le troisième C′, et on voit que le rayon de courbure C est une troisième proportionnelle à c ou OC et à CC′.

C'est la construction à laquelle arrive M. Transon par la considération du cercle de roulement (*Journal de Mathématiques*, 1845).

Soient A″, B″, C″ les centres de courbure, en sorte que

$$AA'' = A, \quad BB'' = B, \quad CC'' = C,$$

on a

$$OA'' = A - a, \quad OB'' = B - b, \quad OC'' = C - c.$$

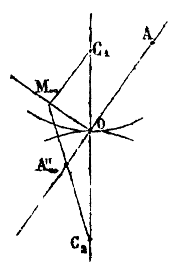
Désignons ces trois longueurs par a'', b'', c'', l'équation (5) prendra la forme

$$(7) \qquad \frac{\sin(\beta-\gamma)}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a''}} + \frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\frac{1}{b}+\frac{1}{b''}} + \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\frac{1}{c}+\frac{1}{c''}} = 0,$$

dans laquelle les dénominateurs sont les sommes des inverses des distances du point O au point décrivant et à son centre de courbure.

3. En se reportant à la construction de Savary, on voit

Fig. 3.



que, si le point décrivant A s'éloigne indéfiniment sur OA, le centre de courbure A″ se rapproche du point O et vient en A''_∞, point que l'on obtient en menant $C_1 M_\infty$ parallèle à AO et joignant M_∞ à C_2, et l'on a

$$OA''_\infty = A - a,$$

quand A et a deviennent infinis.

Cela posé, si l'on considère une courbe Γ faisant partie du système des points A et B, et que l'on mène du point O une normale OΓ à cette courbe, le point Γ ainsi déterminé est le point de contact de la courbe Γ avec son enveloppe. Des courbes équidistantes de Γ ont pour enveloppes des courbes parallèles à l'enveloppe de Γ; toutes ces courbes ont, comme on sait, au point où elles rencontrent OΓ, leurs centres de courbure au même point Γ'', lequel est aussi le centre de courbure de la trajectoire décrite par le point g centre de courbure de la courbe Γ.

Il résulte de là que, si le système mobile est formé des deux points A et B et de la courbe Γ, on pourra lui appliquer la relation (5) en substituant à la courbe Γ le point g qui remplace ainsi le point C précédemment considéré.

Dans cette relation, c désignera la distance Og, et C désignera le rayon de courbure de la courbe décrite par le point g et dont le centre de courbure est en Γ'' centre de courbure de l'enveloppe de Γ.

4. Dans le cas particulier où la courbe Γ est une droite, il résulte de la remarque qui précède que, pour le point g alors situé à l'infini, on a $C - c = O\Gamma''$; cette distance doit être comptée en sens contraire de OC quand elle est positive.

La relation (5) devient donc

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} & a\left(1 - \frac{a}{A}\right)\sin(\beta - \gamma) \\ & \quad + b\left(1 - \frac{b}{B}\right)\sin(\gamma - \alpha) + (C - c)\sin(\alpha - \beta) = 0, \end{aligned} \right.$$

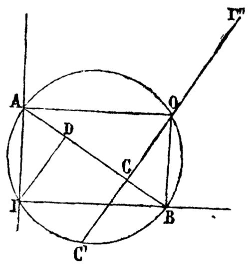
et on peut l'écrire en observant que $O\Gamma''$ est compté en sens inverse de OA' et de OB',

$$(9)\quad OA'\sin(\beta-\gamma)+OB'\sin(\gamma-\alpha)-O\Gamma''\sin(\alpha-\beta)=0;$$

elle est donc renfermée dans l'équation (6), si au point C' on substitue le point Γ''. Ainsi le point Γ'' coïncide avec le symétrique du point C' par rapport au point O.

5. Cherchons comme application le rayon de courbure de l'enveloppe d'une droite de longueur constante qui s'appuie sur deux droites fixes; les points A' et B' coïncident alors avec les points A et B; menons les normales AO et BO, puis la normale OC à la courbe mobile AB.

Fig. 4.



Cette normale vient rencontrer le cercle en C'; prenant $O\Gamma''=OC'$, Γ'' sera le centre de courbure de l'enveloppe de AB pour le point C, et comme $OC=ID$, on voit que *le rayon de courbure en un point de l'enveloppe est triple de la distance du centre de l'enveloppe à la tangente au point considéré.*

Ce résultat est aisé à vérifier par le calcul, car l'équation de l'enveloppe est, comme on sait,

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}.$$

Le rayon de courbure en un point C (x, y) est, d'après l'expression connue de ρ,

$$\rho = 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}l^{\frac{1}{3}};$$

d'autre part, la distance ID du centre à la tangente est

$$\frac{l^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x^{-\frac{2}{3}}+y^{-\frac{2}{3}}}} = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}l^{\frac{1}{3}}.$$

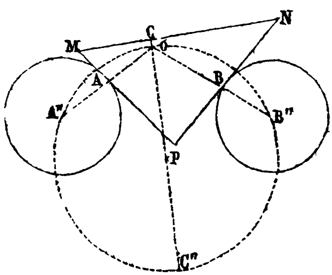
Ainsi $\rho = 3\mathrm{ID}$.

6. Si nous considérons un triangle lié à la figure mobile, on voit d'après ce qui précède que :

Les centres de courbure des enveloppes des côtés d'un triangle mobile sont situés sur un même cercle passant par le point de concours O *des normales aux trois enveloppes menées aux points de contact avec les côtés du triangle.*

7. Comme application, considérons un triangle dont deux côtés restent tangents à deux courbes ; cherchons le rayon de courbure de l'enveloppe du troisième côté.

Fig. 5.



Soit MNP le triangle dont les côtés MP, NP restent tangents aux deux cercles A″ et B″; soient A et B les points de contact, $A''A$, $B''B$ les normales qui se rencontrent en O; abaissons OC, C sera le point de contact de MN avec son enveloppe; traçons le cercle $A''B''O$, le centre de courbure C'' doit être sur ce cercle au point où il est rencontré par OC; observons maintenant que le cercle $A''B''O$ est invariable, car les points A'' et B'' sont fixes et l'angle $A''OB''$ constant supplémentaire de P. Le point C'' reste donc constamment sur le cercle $A''OB''$, et comme ce cercle ne saurait être le lieu des centres de courbure de l'enveloppe de MN, il en résulte que ce point C'' est fixe. C'est ce que l'on reconnaît directement en observant que les angles $A''OC''$, $B''OC''$ sont constants comme respectivement égaux à M et N. Donc l'enveloppe de MN est un cercle.

8. La proposition précédente peut être généralisée; car elle s'applique à un nombre quelconque de droites formant un polygone ou concourantes.

9. Laissant de côté le cas particulier où la courbe Γ est une droite, nous voyons qu'il résulte du § III que nous pouvons calculer le rayon de courbure d'une courbe décrite dans les conditions suivantes :

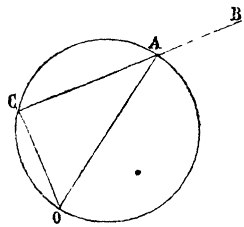
Étant donnés une courbe et deux points, la courbe glisse sur une courbe fixe : l'un des points décrit une trajectoire donnée; le second point décrit alors une courbe dont la formule (9) nous donne le rayon de courbure.

Si la courbe fixe se réduit à un point, la courbe mobile se trouve alors assujettie à passer par un point fixe.

10. *Application à la détermination du rayon de courbure du limaçon de Pascal.* — Par un point fixe C d'une circonférence, on trace une corde CA sur laquelle on prend, à partir du point A, une longueur AB con-

stante : le point B décrit le limaçon de Pascal. La courbe Γ

Fig. 6.



est ici la droite CB, la courbe fixe se réduit au point C, le point Γ″ coïncide avec ce point, et $O\Gamma'' = -OC$. L'application de l'équation (8) donne, pour déterminer le rayon de courbure B au point B,

$$OA(1-2)\sin BOC - OB\left(1-\frac{OB}{B}\right)\sin AOC + OC\sin AOB = 0,$$

ou

$$\frac{OA.BC}{OB} + OB\left(1-\frac{OB}{B}\right)\frac{AC}{OA} + OC^2\,\frac{AB}{OA.OB} = 0;$$

ce qui donne, pour le rayon de courbure B,

$$B = \frac{OB^5}{OB^2 + OC^2 + AC.BC},$$

résultat que l'on vérifie aisément à l'aide de l'équation de la courbe

$$r = OA\cos\theta + AB,$$

qui donne

$$\frac{dr}{d\theta} = -OA\sin\theta = -OC,$$

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} = -OA\cos\theta = -AC.$$

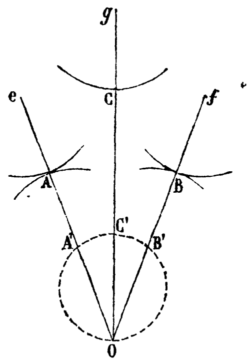
Ces valeurs, substituées dans l'expression connue du rayon de courbure, donnent

$$\rho = \frac{(CB^2 + OC^2)^{\frac{3}{2}}}{CB^2 + OC^2 + AC.CB} = \frac{OB^3}{OB^2 + OC^2 + AC.BC}.$$

11. Plus généralement, considérons le cas où une courbe glisse sur deux autres, et cherchons le rayon de courbure de l'enveloppe d'une courbe liée à la première.

Nommons ξ, η, ζ les rayons de courbure des courbes mobiles aux points où elles touchent leurs enveloppes; il

Fig. 7.



suffira de remplacer, dans l'équation (5), a et A par $a + \xi$, $A + \xi$, etc., ce qui donne

$$(10) \qquad (a + \xi)\left(1 - \frac{a + \xi}{A + \xi}\right)\sin(\beta - \gamma) + \ldots = 0.$$

Prenons

$$(11) \quad eA' = \frac{(a + \xi)^2}{A + \xi}, \quad fB' = \frac{(b + \eta)^2}{B + \eta}, \quad gC' = \frac{(c + \zeta)^2}{C + \zeta},$$

et la relation précédente devient

$$(12) \quad OA' \sin(\beta - \gamma) + OB' \sin(\gamma - \alpha) + OC' \sin(\alpha - \beta) = 0;$$

les points A′, B′, C′ sont donc sur une même circonférence passant en O.

L'équation (10) comprend la solution du problème qui nous occupe dans des cas particuliers très-généraux, parmi lesquels je mentionnerai les suivants :

Si les courbes fixes se composent d'un système de deux droites auxquelles une courbe mobile reste constamment tangente, on a alors A et B infinis, et l'équation (10) se réduit à

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} &(a+\xi)\sin(\beta-\gamma)+(b+\eta)\sin(\gamma-\alpha) \\ &\qquad +(c+\zeta)\left(1-\frac{c+\zeta}{C+\zeta}\right)\sin(\alpha-\beta)=0; \end{aligned} \right.$$

les points A′ et B′ coïncident alors avec les points e et f.

Si en outre la courbe mobile C est une droite, le centre de courbure Γ″ de l'enveloppe de la droite est symétrique par rapport au point O du point C′ situé sur le cercle Oef.

Si les courbes fixes se réduisent à deux points, c'est-à-dire à deux cercles de rayon nul, la courbe mobile passe alors par deux points fixes. On a A et B nuls; l'équation (10) devient donc

$$\begin{aligned} &\frac{a}{\xi}(a+\xi)\sin(\beta-\gamma)+\frac{b}{\eta}(b+\eta)\sin(\gamma-\alpha) \\ &\qquad +(c+\zeta)\left(1-\frac{c+\zeta}{C+\zeta}\right)\sin(\alpha-\beta)=0. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, le coefficient de $\sin(\alpha-\beta)$ se réduit à C — c, si la courbe mobile C est une droite, car alors ζ est infini.

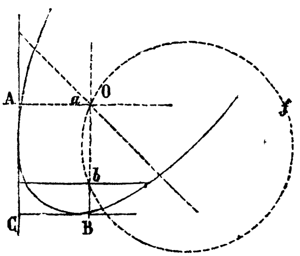
Comme application offrant une vérification facile, cherchons le rayon de courbure de l'enveloppe de la directrice d'une parabole constante qui glisse dans un angle droit C. Soient A et B les points de contact; menons les normales AO, BO; il est aisé de calculer les rayons de courbure de la parabole en A et B, et l'on trouve

$$\text{En A}\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \xi = \frac{2b^2}{a} = \mathrm{A}e,$$

$$\text{En B}\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \eta = \frac{2a^2}{b} = \mathrm{B}f.$$

Ces valeurs, portées dans l'équation (13), donnent, en observant que les signes de a et b doivent être changés,

Fig. 8.



parce qu'ils sont portés en sens inverse de la direction suivie dans la figure précédente,

$$\left(-a + \frac{2b^2}{a}\right)\sin\mathrm{BOC} + \left(-b + \frac{2a^2}{b}\right)\cos\mathrm{BOC} - \mathrm{O}\Gamma'' = 0,$$

car OC est la normale à la directrice; d'ailleurs

$$\operatorname{tang}\mathrm{BOC} = \frac{a}{b},$$

d'où il résulte

$$\mathrm{O}\Gamma'' = \sqrt{a^2 + b^2} = \mathrm{OC}.$$

Et, en effet, la directrice de la parabole passant constamment par l'origine, l'enveloppe se réduit à un point; et le cercle de courbure coïncide avec le point C. Signalons en passant la relation très-simple qui lie les rayons de courbure d'une parabole aux extrémités d'une corde focale, savoir :

$$\frac{1}{\xi^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{\eta^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{p^{\frac{2}{3}}},$$

et remarquons aussi la construction géométrique très-simple des centres de courbure dans la parabole, qui résulte des valeurs de ξ, η, et qu'on peut formuler par le théorème suivant :

Dans la parabole, les portions de deux normales rectangulaires comprises entre la courbe et la directrice sont inversement égales à la moitié des rayons de courbure de la courbe suivant ces normales.