PAINVIN

# Étude d'un complexe du second ordre

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 11 (1872), p. 97-107

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__97_0>

# ÉTUDE D'UN COMPLEXE DU SECOND ORDRE

(suite, voir même tome, p. 49);

PAR M. PAINVIN.

11. La surface $\Delta$, comme nous le verrons par l'analyse suivante, se compose de deux nappes distinctes, qui viennent se raccorder en quatre points coniques réels. Il est entendu, une fois pour toutes, que nous ne nous occuperons, dans cette étude, que des solutions réelles.

Nous allons maintenant déterminer les valeurs du paramètre $\rho$ correspondant à chacune des deux nappes, les coordonnées du point, et l'équation du système (C).

Nous avons déjà dit que les quantités $\sigma_2$ et $\sigma_3$ pouvaient seules être nulles; or les équations (17), (11), (12) et (19) donnent immédiatement :

I. $\sigma_2 = 0$.

(23) Nappe supérieure de $\Delta$

(1°) $\rho_3 = -\rho_1, \quad \sigma_1 = \rho_2 - \rho_1, \quad \sigma_3 = \rho_2 + \rho_1;$

(2°) $S_0 = \rho_2, \quad G_0 = \rho_1^2, \quad H_0 = -\rho_1^2\rho_2;$

(3°)
$$\left\{\begin{aligned} x_0^2 &= -\frac{(a^4-\rho_1^2)(a^2+\rho_2)}{b_1^2 c_1^2},\\ y_0^2 &= -\frac{(b^4-\rho_1^2)(b^2+\rho_2)}{c_1^2 a_1^2},\\ z_0^2 &= -\frac{(c^4-\rho_1^2)(c^2+\rho_2)}{a_1^2 b_1^2};\end{aligned}\right.$$

(4°) $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \rho_2 = e + \rho_2;$

(5°)
$$\left\{\begin{aligned} &(a^2+\rho_1)(b^2+\rho_1)(c^2+\rho_1)\\ &\quad\times\left(\frac{x_0 x}{a^2+\rho_1}+\frac{y_0 y}{b^2+\rho_1}+\frac{z_0 z}{c^2+\rho_1}-1\right)^2\\ &-(a^2-\rho_1)(b^2-\rho_1)(c^2-\rho_1)\\ &\quad\times\left(\frac{x_0 x}{a^2-\rho_1}+\frac{y_0 y}{b^2-\rho_1}+\frac{z_0 z}{c^2-\rho_1}-1\right)^2 = 0.\end{aligned}\right.$$

II $\sigma_3 = 0$.

$$
(24)\ \text{Nappe inférieure de } \Delta \quad
\left\{
\begin{array}{ll}
(1^\circ) & \rho_2 = -\rho_1, \quad \sigma_1 = \rho_3 - \rho_1, \quad \sigma_2 = \rho_3 + \rho_1; \\
(2^\circ) & S_0 = \rho_3, \qquad G_0 = \rho_1^2, \qquad H_0 = -\rho_1^2 \rho_3; \\
(3^\circ) & \left\{
\begin{array}{l}
x_0^2 = -\dfrac{(a^4 - \rho_1^2)(a^2 + \rho_3)}{b_1^2 c_1^2}, \\
y_0^2 = -\dfrac{(b^4 - \rho_1^2)(b^2 + \rho_3)}{c_1^2 a_1^2}, \\
z_0^2 = -\dfrac{(c^4 - \rho_1^2)(c^2 + \rho_3)}{a_1^2 b_1^2}
\end{array}
\right. \\
(4^\circ) & x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \rho_3 = e + \rho_3; \\
(5^\circ) & \left\{
\begin{array}{l}
(a^2 + \rho_1)(b^2 + \rho_1)(c^2 + \rho_1) \\
\quad \times \left( \dfrac{x_0 x}{a^2 + \rho_1} + \dfrac{y_0 y}{b^2 + \rho_1} + \dfrac{z_0 z}{c^2 + \rho_1} - 1 \right)^2 \\
- (a^2 - \rho_1)(b^2 - \rho_1)(c^2 - \rho_1) \\
\quad \times \left( \dfrac{x_0 x}{a^2 - \rho_1} + \dfrac{y_0 y}{b^2 - \rho_1} + \dfrac{z_0 z}{c^2 - \rho_1} - 1 \right)^2.
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

Comme $\rho_3 < \rho_2$, on voit, par les égalités (4°), que la surface $\Delta$ se compose de deux nappes distinctes; les relations (23) correspondent à la *nappe supérieure,* tandis que les relations (24) correspondent à la *nappe inférieure* de $\Delta$.

Pour la nappe supérieure, on a

$$S_0 < 0, \quad \text{et} \quad S_0^2 - G_0 = \rho_2^2 - \rho_1^2 < 0;$$

car, pour que $x_0^2$, $y_0^2$ et $z_0^2$ [équations (23), formules (3°)] soient positifs, il faut, eu égard aux inégalités (13) et (14), que $\rho_1$ soit positif et compris entre $a^2$ et $b^2$; et, comme la valeur absolue de $\rho_2$ est comprise entre $c^2$ et $b^2$, il suit de là

$$\rho_2^2 < \rho_1^2.$$

L'équation (16) nous montre alors que les deux plans du système (C) sont réels.

Pour la nappe inférieure, on a

$$S_0 < 0, \quad \text{et} \quad S_0^2 - G_0 = \rho_3^2 - \rho_1^2 > 0;$$

car, pour que $x_0^2$, $y_0^2$ et $z_0^2$ [équations (24), formules (30)] soient positifs, il faut, eu égard aux inégalités (13) et (14), que $\rho_1$ soit positif et compris entre $c^2$ et $b^2$; et, comme la valeur absolue de $\rho_3$ est comprise entre $a^2$ et $b^2$, il suit de là

$$\rho_3^2 > \rho_1^2.$$

L'équation (16) nous montre alors que les deux plans du système (C) sont imaginaires.

Par conséquent :

THÉORÈME IV. — *La surface* ($\Delta$) *se compose de deux nappes distinctes renfermées entre la sphère* (S) *et l'ellipsoïde* (G); *ces deux nappes se raccordent en quatre points doubles coniques réels.*

(Il y a douze autres points doubles imaginaires, dont quatre à l'infini.)

*Pour les différents points de la surface* $\Delta$, *le paramètre* $\rho_1$ *de l'ellipsoïde homofocal qui passe par ces points est positif.*

*Pour la* NAPPE SUPÉRIEURE, *on a*

$$b^2 < \rho_1 < a^2;$$

*le cône* (C) *se réduit à* DEUX PLANS RÉELS, *dont l'arête, normale à l'hyperboloïde homofocal à une nappe qui passe par le point considéré, touche la surface* $\Delta$ *en ce point.*

*Pour la* NAPPE INFÉRIEURE, *on a*

$$c^2 < \rho_1 < b^2;$$

*le cône* (C) *se réduit à* DEUX PLANS IMAGINAIRES, *dont l'arête, normale à l'hyperboloïde homofocal à deux* *nappes qui passe par le point considéré, touche la surface Δ en ce point.*

**12.** Avant d'aller plus loin, démontrons analytiquement que l'arête du système de plans auquel se réduit le cône (C) touche la surface Δ.

Nous voyons, par les équations (23) et (24), que la droite, intersection des deux plans auxquels se réduit le cône du complexe, est définie par les deux équations

$$(25)\qquad \begin{cases} \dfrac{xx_0}{a^2+\rho_1}+\dfrac{yy_0}{b^2+\rho_1}+\dfrac{zz_0}{c^2+\rho_1}-1=0, \\[2ex] \dfrac{xx_0}{a^2-\rho_1}+\dfrac{yy_0}{b^2-\rho_1}+\dfrac{zz_0}{c^2-\rho_1}-1=0, \end{cases}$$

$\rho_1$ étant le paramètre de l'ellipsoïde homofocal qui passe par le point $(x_0, y_0, z_0)$.

Les coordonnées d'un point quelconque de cette droite peuvent se représenter par les équations

$$x=x_0+\frac{\lambda x_0}{A_1},\qquad y=y_0+\frac{\lambda y_0}{B_1},\qquad z=z_0+\frac{\lambda z_0}{C_1},$$

$\lambda$ étant un paramètre arbitaire. Substituons ces valeurs dans les équations (25), et écrivons qu'elles sont vérifiées, quel que soit $\lambda$; il vient

$$\frac{x_0^2}{A_1(a^2+\rho_1)}+\frac{y_0^2}{B_1(b^2+\rho_1)}+\frac{z_0^2}{C_1(c^2+\rho_1)}=0,$$
$$\frac{x_0^2}{A_1(a^2-\rho_1)}+\frac{y_0^2}{B_1(b^2-\rho_1)}+\frac{z_0^2}{C_1(c^2-\rho_1)}=0,$$

après avoir remarqué que les quantités

$$\frac{x_0^2}{a^2+\rho_1}+\frac{y_0^2}{b^2+\rho_1}+\frac{z_0^2}{c^2+\rho_1}-1 \quad\text{et}\quad \frac{x_0^2}{a^2-\rho_1}+\frac{y_0^2}{b^2-\rho_1}+\frac{z_0^2}{c^2-\rho_1}-1$$

sont nulles.

Si l'on a égard aux formules (3°), équations (23), les égalités précédentes deviendront

$$\frac{a_1^2(a^2+\rho_1)(a^2+\rho_2)}{A_1}+\frac{b_1^2(b^2+\rho_1)(b^2+\rho_2)}{B_1}+\frac{c_1^2(c^2+\rho_1)(c^2+\rho_2)}{C_1}=0,$$

$$\frac{a_1^2(a^2-\rho_1)(a^2+\rho_2)}{A_1}+\frac{b_1^2(b^2-\rho_1)(b^2+\rho_2)}{B_1}+\frac{c_1^2(c^2-\rho_1)(c^2+\rho_2)}{C_1}=0;$$

or ces égalités seront évidemment vérifiées, si l'on prend

$$\frac{A_1}{a^2+\rho_2}=\frac{B_1}{b^2+\rho_2}=\frac{C_1}{c^2+\rho_2};$$

ces conditions sont suffisantes et nécessaires. Par conséquent :

*Les coordonnées $x$, $y$, $z$ d'un point quelconque de l'arête du système de deux plans auxquels se réduit le cône* (C) *du complexe ayant son sommet en* $(x_0, y_0, z_0)$ *peuvent se représenter par*

$$(26)\quad (\delta)\quad \begin{cases} x = x_0 + \lambda \dfrac{x_0}{a^2+\rho_2}, \\ y = y_0 + \lambda \dfrac{y_0}{b^2+\rho_2}, \\ z = z_0 + \lambda \dfrac{z_0}{c^2+\rho_2}, \end{cases}$$

*$\lambda$ étant un paramètre arbitraire.* Les formules (26) correspondent à un point situé sur la nappe supérieure de $\Delta$; pour obtenir les formules correspondant à un point de la nappe inférieure, il suffit d'y remplacer $\rho_2$ par $\rho_3$.

Les équations (26) nous montrent encore que la droite ($\delta$) est normale en $(x_0, y_0, z_0)$ à la surface homofocale ($\rho_2$).

Ceci établi, remarquons que l'équation du plan tangent en un point $(x_0, y_0, z_0)$ de la surface $\Delta$ est, d'après l'équation (21) et les notations (6),

$$(27)\quad \left\{ \begin{aligned} & xx_0(b^2c^2 + AS_0 + G_0) + yy_0(c^2a^2 + BS_0 + G_0) \\ & \quad + zz_0(a^2b^2 + CS_0 + G_0) - (h + gS_0 + eG_0 - H_0) = 0, \end{aligned} \right.$$

avec la condition

$$(27\ bis)\qquad S_0G_0 + H_0 = 0.$$

Or, si l'on exprime que la droite (26) est tout entière dans ce plan, on a, en égalant à zéro le coefficient de $\lambda$ et le terme indépendant de $\lambda$,

$$(1^{\circ})\quad \left\{ \begin{aligned} & x_0^2(b^2c^2 + AS_0 + G_0) + y_0^2(c^2a^2 + BS_0 + G_0) \\ & \quad + z_0^2(a^2b^2 + CS_0 + G_0) - (h + gS_0 + eG_0 - H_0) = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(2^{\circ})\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{x_0^2}{a^2+\rho_2}(b^2c^2 + AS_0 + G_0) + \frac{y_0^2}{b^2+\rho_2}(c^2a^2 + BS_0 + G_0) \\ & \qquad\qquad + \frac{z_0^2}{c^2+\rho_2}(a^2b^2 + CS_0 + G_0) = 0. \end{aligned} \right.$$

D'après les notations (6), l'égalité (1°) devient

$$H_0 + h + S_0(G_0 + g) + G_0(S_0 + e) - (h + gS_0 + eG_0 - H_0) = 0,$$

ce qui est visiblement une identité.

Quant à l'égalité (2°), si l'on y introduit les valeurs (3°), équations (23), elle devient

$$\begin{aligned} & a_1^2(a^4 - \rho_1^2)(b^2c^2 + AS_0 + G_0) + b_1^2(b^4 - \rho_1^2)(c^2a^2 + BS_0 + G_0) \\ & \qquad\qquad + c_1^2(c^4 - \rho_1^2)(a^2b^2 + CS_0 + G_0) = 0; \end{aligned}$$

ou encore, puisque $S_0 = \rho_2$ et $G_0 = \rho_1^2$,

$$\begin{aligned} & a_1^2(a^4 - \rho_1^2)(b^2c^2 + A\rho_2 + \rho_1^2) + b_1^2(b^4 - \rho_1^2)(c^2a^2 + B\rho_2 + \rho_1^2) \\ & \qquad\qquad + c_1^2(c^4 - \rho_1^2)(a^2b^2 + C\rho_2 + \rho_1^2) = 0; \end{aligned}$$

on voit alors immédiatement que le coefficient de $\rho_2$ et ceux des diverses puissances de $\rho_1^2$ sont respectivement nuls. La proposition énoncée est donc démontrée.

13. Nous allons donner encore une autre démonstra-

tion de la même proposition; elle nous fournira l'occasion d'écrire plusieurs relations qui nous seront fort utiles dans la suite.

Si l'on se reporte aux notations (5) du n° 5, on constate immédiatement les égalités suivantes :

$$(28)\quad\left\{\begin{aligned}
&a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 0,\\
&a^2 a_1^2 + b^2 b_1^2 + c^2 c_1^2 = 0,\\
&\mathrm{A} a_1^2 + \mathrm{B} b_1^2 + \mathrm{C} c_1^2 = 0,\\
&\mathrm{A} a^4 a_1^2 + \mathrm{B} b^4 b_1^2 + \mathrm{C} c^4 c_1^2 = 0;\\
&a_1^2 \mathrm{A}^2 + b_1^2 \mathrm{B}^2 + c_1^2 \mathrm{C}^2 = - a_1^2 b_1^2 c_1^2,\\
&a_1^2 a^4 + b_1^2 b^4 + c_1^2 c^4 = - a_1^2 b_1^2 c_1^2,\\
&a_1^2 b^2 c^2 + b_1^2 c^2 a^2 + c_1^2 a^2 b^2 = - a_1^2 b_1^2 c_1^2,\\
&a_1^2 \mathrm{BC} + b_1^2 \mathrm{CA} + c_1^2 \mathrm{AB} = - a_1^2 b_1^2 c_1^2,\\
&a^2 a_1^2 \mathrm{A} + b^2 b_1^2 \mathrm{B} + c^2 c_1^2 \mathrm{C} = + a_1^2 b_1^2 c_1^2;\\
&a^2 a_1^2 \mathrm{BC} + b^2 b_1^2 \mathrm{CA} + c^2 c_1^2 \mathrm{AB} = - e . a_1^2 b_1^2 c_1^2,\\
&a_1^2 a^6 + b_1^2 b^6 + c_1^2 c^6 = - e . a_1^2 b_1^2 c_1^2,\\
&a_1^2 a^2 \mathrm{A}^2 + b_1^2 b^2 \mathrm{B}^2 + c_1^2 c^2 \mathrm{C}^2 = + e . a_1^2 b_1^2 c_1^2,\\
&a_1^2 b^4 c^4 + b_1^2 c^4 a^4 + a_1^2 a^4 b^4 = - g . a_1^2 b_1^2 c_1^2,\\
&a_1^2 a^4 \mathrm{A}^2 + b_1^2 b^4 \mathrm{B}^2 + c_1^2 c^4 \mathrm{C}^2 = + g . a_1^2 b_1^2 c_1^2,\\
&a_1^2 b^2 c^2 \mathrm{BC} + b_1^2 c^2 a^2 \mathrm{CA} + c_1^2 a^2 b^2 \mathrm{AB} = - g . a_1^2 b_1^2 c_1^2.
\end{aligned}\right.$$

Posons, en outre,

$$(29)\quad\left\{\begin{aligned}
\mathrm{E} &= \rho_1^2 \rho^2 + e\rho_1^2 + g\rho_2 + h,\\
\mathrm{F} &= \rho_1^4 + e\rho_1^2\rho_2 + g\rho_1^2 + h\rho_2;
\end{aligned}\right.$$

on constate de suite que

$$(30)\quad\left\{\begin{aligned}
(a^4 - \rho_1^2)(b^2c^2 + \mathrm{A}\rho_2 + \rho_1^2) &= a^2\mathrm{E} - \mathrm{F},\\
(b^4 - \rho_1^2)(c^2a^2 + \mathrm{B}\rho_2 + \rho_1^2) &= b^2\mathrm{E} - \mathrm{F},\\
(c^4 - \rho_1^2)(a^2b^2 + \mathrm{C}\rho_2 + \rho_1^2) &= c^2\mathrm{E} - \mathrm{F};
\end{aligned}\right.$$

$$(30\ bis)\quad\left\{\begin{aligned}
(a^2 + \rho_2)(b^2c^2 + \mathrm{A}\rho_2 + \rho_1^2) &= \mathrm{E} + \mathrm{A}(\rho_2^2 - \rho_1^2),\\
(b^2 + \rho_2)(c^2a^2 + \mathrm{B}\rho_2 + \rho_1^2) &= \mathrm{E} + \mathrm{B}(\rho_2^2 - \rho_1^2),\\
(c^2 + \rho_2)(a^2b^2 + \mathrm{C}\rho_2 + \rho_1^2) &= \mathrm{E} + \mathrm{C}(\rho_2^2 - \rho_1^2);
\end{aligned}\right.$$

de là on conclut

$$(31)\quad \begin{cases} (a^4-\rho_1^2)(b^2c^2+A\rho_2+\rho_2^2)=a^2E-F+(a^4-\rho_1^2)(\rho_2^2-\rho_1^2), \\ (b^4-\rho_1^2)(c^2a^2+B\rho_2+\rho_2^2)=b^2E-F+(b^4-\rho_1^2)(\rho_2^2-\rho_1^2), \\ (c^4-\rho_1^2)(a^2b^2+C\rho_2+\rho_2^2)=c^2E-F+(c^4-\rho_1^2)(\rho_2^2-\rho_1^2). \end{cases}$$

Ceci établi, substituons les valeurs (26) dans l'équation

$$SG+H=0$$

de la surface $\Delta$; dans ce but, calculons d'abord S, G, H.

On a, en substituant les valeurs (26) dans les expressions (6), n° 5, de S, G, H,

$$\begin{aligned} S &= S_0+2\lambda\left(\frac{x_0^2}{a^2+\rho_2}+\frac{y_0^2}{b^2+\rho_2}+\frac{z_0^2}{c^2+\rho_2}\right) \\ &\quad +\lambda^2\left[\frac{x_0^2}{(a^2+\rho_2)^2}+\frac{y_0^2}{(b^2+\rho_2)^2}+\frac{z_0^2}{(c^2+\rho_2)^2}\right], \\ G &= G_0+2\lambda\left(\frac{Ax_0^2}{a^2+\rho_2}+\frac{By_0^2}{b^2+\rho_2}+\frac{Cz_0^2}{c^2+\rho_2}\right) \\ &\quad +\lambda^2\left[\frac{Ax_0^2}{(a^2+\rho_2)^2}+\frac{By_0^2}{(b^2+\rho_2)^2}+\frac{Cz_0^2}{(c^2+\rho_2)^2}\right], \\ H &= H_0+2\lambda\left(\frac{b^2c^2x_0^2}{a^2+\rho_2}+\frac{c^2a^2y_0^2}{b^2+\rho_2}+\frac{a^2b^2z_0^2}{c^2+\rho_2}\right) \\ &\quad +\lambda^2\left[\frac{b^2c^2x_0^2}{(a^2+\rho_2)^2}+\frac{c^2a^2y_0^2}{(b^2+\rho_2)^2}+\frac{a^2b^2z_0^2}{(c^2+\rho_2)^2}\right]. \end{aligned}$$

Si maintenant on introduit les valeurs (2°) et (3°), équations (23), n° 11, et qu'on ait égard aux relations (28) et (31), on obtient très-facilement

$$(32)\quad \begin{cases} S=\rho_2+2\lambda \\ \qquad +\dfrac{\lambda^2}{(a^2+\rho_2)(b^2+\rho_2)(c^2+\rho_2)}(\rho_2^2-\rho_1^2), \\ G=\rho_1^2+0.\lambda \\ \qquad -\dfrac{\lambda^2}{(a^2+\rho_2)(b^2+\rho_2)(c^2+\rho_2)}E, \\ H=-\rho_1^2\rho_2-2\rho_1^2\lambda \\ \qquad -\dfrac{\lambda}{(a^2+\rho_2)(b^2+\rho_2)(c^2+\rho_2)}[F+\rho_1^2(\rho_2^2-\rho_1^2)]. \end{cases}$$

Si l'on substitue ces dernières dans l'équation $SG + H = 0$ de la surface $\Delta$, on est conduit au résultat très-simple

$$
(33)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\lambda^2 [(\rho_1^2 + \rho_2^2)(\rho_1^2 + g) + 2(e\rho_1^2 + h)\rho_2] \\
&\quad + [\rho_2(\rho_1^2 + g) + (e\rho_1^2 + h)] \\
&\quad \times \left[ 2 + \frac{\lambda(\rho_2^2 - \rho_1^2)}{(a^2 + \rho_2)(b^2 + \rho_2)(c^2 + \rho_2)} \right] \lambda^3 = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

On aura l'équation analogue relative à la nappe inférieure en remplaçant $\rho_2$ par $\rho_3$.

On voit donc que l'arête des deux plans auxquels se réduit le cône (C) du complexe touche la surface $\Delta$ au point $(x_0, y_0, z_0)$, et qu'elle est une tangente ordinaire, c'est-à-dire qu'elle n'y rencontre la surface qu'en deux points coïncidents.

On peut se demander si le coefficient de $\lambda^2$ peut être nul, c'est-à-dire si la droite (26) peut être une *tangente inflexionnelle* de $\Delta$.

En égalant à zéro le coefficient de $\lambda^2$ dans l'équation (33), on trouve

$$(\rho_1^2 + g)\rho_2^2 + 2(e\rho_1^2 + h)\rho_2 + \rho_1^2(\rho_1^2 + g) = 0,$$

ou encore

$$[\rho_2(\rho_1^2 + g) + e\rho_1^2 + h]^2 + \rho_1^2(\rho_1^2 + g)^2 - (e\rho_1^2 + h)^2 = 0,$$

ce qu'on peut écrire enfin

$$(1^\circ)\quad (\rho_2\rho_1^2 + e\rho_1^2 + g\rho_2 + h)^2 - (a^4 - o^2)\, b^4 - \rho_1^2)(c^4 - \rho_1^2) = 0.$$

Or, pour la surface $\Delta$, $\rho_1$ est positif et compris entre $a^2$ et $b^2$ pour la nappe supérieure, entre $b^2$ et $c^2$ pour la nappe inférieure (théorème IV, n° 12). On voit alors que l'équation n'admettra pas de solution réelle en $\rho_3$ pour la nappe inférieure, mais elle admettra une solution réelle en $\rho_2$ pour la nappe supérieure. Seulement il est facile de constater que la plus grande des valeurs absolues de $\rho_2$ est supérieure à $b^2$, et que la plus petite de ses valeurs absolues est inférieure à $c^2$. Il n'y a donc pas, en définitive, de points réels pour lesquels l'arête d'un système du complexe serait une tangente inflexionnelle. Ce résultat pourrait d'ailleurs se conclure de la forme supposée connue de la surface $\Delta$.

*Remarque.* — Les droites $(\delta)$ [équations (26), n° 12], qui sont les arêtes des systèmes du complexe, forment une *congruence* que j'étudierai dans un autre Mémoire. Pour l'instant, je me contenterai d'énoncer la propriété suivante :

*Dans un plan, arbitrairement donné, il y a quatre droites* $(\delta)$ ; *par un point, arbitrairement donné, passent quatre droites* $(\delta)$.

La démonstration analytique en sera donnée dans le § IV.

14. Nous préciserons encore mieux la position des droites du complexe en énonçant la proposition suivante :

Théorème V. — *Les droites réelles du complexe passent toutes entre les deux nappes de la surface* $\Delta$, *sans jamais pénétrer dans l'intérieur de la nappe inférieure; les positions limites de ces droites sont des tangentes à la surface* $\Delta$.

En effet, une droite réelle (D) ne peut pas pénétrer dans la nappe inférieure de $\Delta$; car, si cela pouvait arriver, elle rencontrerait cette nappe en un certain point I; pour ce point I, le cône (C) du complexe se réduit à deux plans imaginaires dont l'arête touche $\Delta$ en I; mais la droite (D), qui passe par le point I, doit alors appartenir à ce système de deux plans, et, comme elle est réelle, elle ne peut que coïncider avec leur arête; l'hypothèse faite est donc inadmissible

Supposons maintenant la droite (D) réelle et extérieure à la surface $\Delta$; menons alors un plan par cette droite et le centre O de l'ellipsoïde; ce plan coupera la nappe extérieure de $\Delta$ suivant une certaine courbe $\delta'$; les cônes du complexe, dont les sommets sont sur $\delta'$, se décomposent en des plans réels, dont les intersections par le plan considéré seront autant de droites réelles du complexe situées dans ce plan. D'un autre côté, nous verrons, dans le paragraphe suivant, que les droites du complexe situées dans un plan enveloppent une conique dont le centre est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre O de l'ellipsoïde sur le plan. Dans le cas actuel, le centre de la conique est le point O lui-même; la conique est réelle, puisqu'il y a des droites réelles du complexe dans le plan en question; la conique ne peut pas être une hyperbole, car on pourrait alors lui mener des tangentes des points situés dans le voisinage du point O, et il y aurait des droites réelles du complexe pénétrant dans l'intérieur de la deuxième nappe de $\Delta$, ce qui est contraire à la première partie de la proposition. Cette conique, qui est une ellipse, doit toucher la droite (D); or, si cette droite (D) est extérieure à la surface $\Delta$ et, par suite, à la courbe $\delta'$, l'ellipse interceptera sur cette courbe $\delta'$ une certaine portion d'arc; mais les divers points de cet arc donnent lieu à des droites réelles, issues de ces points, qui devraient toucher l'ellipse, ce qui est impossible. Il y a donc contradiction tant que la droite (D) est extérieure à la courbe $\delta'$; par conséquent, il ne peut pas exister de droite réelle extérieure à la surface ($\Delta$).

M. Darboux, en appelant mon attention sur le lieu géométrique énoncé au commencement, m'avait signalé cette propriété, sans m'en communiquer la démonstration.

(*La suite prochainement.*)