Questions

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 95-96

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__95_0>

QUESTIONS.

1057. En un point M d'un tore, on mène une droite MT située dans le plan tangent. Soient a et b les points où cette droite coupe la surface; menons les deux sphères qui, passant par M, touchent la surface aux points a et b. Désignons par α et β les centres de ces sphères, et par I le point milieu du segment $\alpha\beta$.

Cela posé, si, par le point M, nous menons une droite parallèle à la droite qui joint le point I au centre du tore, dirigée dans le même sens et de longueur double, le point extrême de cette droite est le centre de courbure de la section faite dans le tore par le plan normal passant par MT. (Laguerre.)

1058. On donne une cyclide et une sphère; leur courbe d'intersection est une courbe du quatrième ordre, par laquelle on peut faire passer quatre cônes. Deux des sommets de ces cônes se trouvent respectivement sur chacun des axes de la surface (*); lorsque le centre de la sphère est fixe et que son rayon varie, ces deux sommets décrivent les axes: quel est le lieu décrit par les sommets des deux autres cônes? (Laguerre.)

1059. Tout nombre entier est la somme d'un carré et de deux nombres triangulaires. (Lionnet.)

1060. Tout nombre entier est la somme de deux carrés et d'un nombre triangulaire. (Lionnet.)

(*) *Voir* Mannheim, *Applications*, etc. (*Nouvelles Annales*, t. XIX, p. 73). « Les axes de la cyclide sont les droites fixes par lesquelles passent respectivement les plans des lignes de courbure de chaque système. »

1061. Tout nombre impair est la somme de quatre carrés dont deux sont consécutifs.

(Lionnet.)

1062. Démontrer l'identité suivante

$$[1 - 2(a+b+c+\ldots)x + (a+b+c+\ldots)(aA^2 + bB^2 + cC^2 + \ldots)]^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \sum\sum\sum \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots 2^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}} \frac{d^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}(x^2-A^2)^\alpha (x^2-B^2)^\beta (x^2-C^2)^\gamma \ldots}{dx^{\alpha+\beta+\gamma\ldots}},$$

les sommations s'étendant à toutes les valeurs entières et positives de α, β, γ et $\alpha!$ étant supposé devenir égal à 1, quand $\alpha = 0$. (F. Didon.)

1063. $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ désignent deux fonctions entières de x et de y; $y_1, y_2, \ldots$ sont les racines de l'équation en y, $f(x, y) = 0$, et $x_1, x_2, \ldots$ les racines de la même équation, dans laquelle x est seule traitée comme inconnue; enfin (α_1, β_1), $(\alpha_2, \beta_2), \ldots$ représentent les solutions du système d'équations $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$.

Démontrer la relation

$$\sum_i \frac{1}{(x-\alpha_i)(y-\beta_i)} = \sum_j \frac{1}{y - y_j} \frac{\frac{d\varphi(x, y_j)}{dx}}{\varphi(x, y_j)}$$
$$+ \sum_k \frac{1}{x - x_k} \frac{\frac{d\varphi(x_k, y)}{dy}}{\varphi(x_k, y)}.$$

(F. Didon.)

1064. On a une courbe fermée, plane et convexe. Si $d\sigma$ désigne un élément superficiel infiniment petit extérieur à la courbe, θ l'angle sous lequel on voit la courbe de cet élément, et t, t' les longueurs des tangentes à la courbe issues de l'élément, la somme de toutes les quantités $\frac{d\sigma \sin\theta}{tt'}$, se rapportant à tous les éléments $d\sigma$ du plan extérieurs à la courbe, est égale à $2\pi^2$. (F. Didon.)