Nouvelles annales de mathématiques

Joachimsthal

Sur le nombre de normales réelles que l'on peut mener d'un point donné à un ellipsoïde

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 8-14

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__8_1>

SUR LE NOMBRE DE NORMALES RÉELLES QUE L'ON PEUT MENER D'UN POINT DONNÉ A UN ELLIPSOÏDE

(suite, voir 2e série, t. IX, p. 481);

PAR JOACHIMSTHAL.

Partageons l'intervalle entre $-\infty$ et $+\infty$ en intervalles plus petits, entre lesquels on puisse facilement, au moyen de l'équation (14), déterminer le signe de θ.

On obtient le tableau suivant, où nous avons désigné par une étoile le signe des quantités qui n'est pas déterminé par les tableaux (15) et (16).

I. $b > \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

	1		2		3		4		5		6		7	
u	$-\infty$	$c-\varepsilon$	$c+\varepsilon$	β	β	$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\varepsilon$	$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\varepsilon$	$b-\varepsilon$	$b+\varepsilon$	α	α	$a-\varepsilon$	$a+\varepsilon$	$+\infty$
φ	+	+	+	—	—	*	*	+	+	—	—	+	+	+
φ'	—	—	—	*	*	+	+	—	—	*	*	+	+	+
θ	—	—	+	+	+	+	—	—	+	+	+	+	—	—

D'après le lemme donné plus haut, on voit que, dans les intervalles 1 et 7, il n'y a aucune racine; dans chacun des intervalles 2, 5 et 6, il s'en trouve une, de quelque façon que l'on choisisse le signe indéterminé. Dans chacun des intervalles 3 et 4, il y a au plus une racine; de sorte que, entre β et b [en supposant que $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ ne soit pas une racine], il y a un nombre de racines égal à 0, à 1 ou à 2.

Comme $\varphi(\beta)$ et $\varphi(b)$ sont de signes contraires, il y a exactement une racine dans cet intervalle. Si $\frac{\alpha + \beta}{2}$ est racine, cette racine ne peut être que simple, puisque l'on a

$$\varphi'\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) > 0.$$

On a alors le schema suivant :

	3		4	
u	β	$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\varepsilon$	$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\varepsilon$	$b-\varepsilon$
φ	—	—	+	+
φ'	*	+	+	—
θ	+	+	—	—

Ces deux intervalles ne comprenant aucune racine, il n'y a entre β et b qu'une seule racine, comme dans le cas précédent, et cette racine est $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$.

II. $b<\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$.

On a aussi à distinguer sept intervalles, desquels 1, 2, 6 et 7 sont identiques avec les précédents; les trois autres sont

	3		4		5	
u	β	$b-\varepsilon$	$b+\varepsilon$	$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\varepsilon$	$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\varepsilon$	α
φ	—	+	+	*	*	—
φ'	*	+	+	—	—	*
θ	+	+	—	—	+	+

Il y a une racine comprise dans l'intervalle 3, une dans l'ensemble des intervalles 4 et 5; le cas où $\varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0$ se résout comme ci-dessus.

III. $b=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$.

Dans ce cas, $\theta=-\frac{1}{2}(u-a)(u-c)$ est positif, quand u est compris entre a et c; hors de ces limites, il est négatif.

On a à distinguer les intervalles de $-\infty$ à $c-\varepsilon$, de $c+\varepsilon$ à $b-\varepsilon$, de $b+\varepsilon$ à $a-\varepsilon$ et de $a+\varepsilon$ à $+\infty$. Les intervalles extrêmes sont identiques avec ceux désignés précédemment par 1 et 7, et ils ne contiennent aucune racine.

Les deux autres donnent le tableau suivant :

u	$c+\varepsilon$	$b-\varepsilon$	$b+\varepsilon$	$a-\varepsilon$
φ	+	+	+	+
φ'	—	*	*	+
θ	+	+	+	+

Chacun des intervalles contient au plus deux racines, et il les contient réellement, car on a

$$\varphi(c)=+,\quad \varphi(\beta)=-,\quad \varphi(b)=+,\quad \varphi(\alpha)=-,\quad \varphi(a)=+.$$

L'équation $\varphi(u)=0$ [ou l'équation (10)] a donc en tout quatre racines réelles, comprises entre les limites c et β, β et b, b et α, α et a, et chacune de ces racines est simple.

Remarque. — L'équation $\varphi(u)=0$ mériterait peut-être, à d'autres points de vue, une discussion plus approfondie.

Dans le plan, on a l'équation analogue

$$2\left[\frac{1}{(u-a)^2}+\frac{1}{(u-b)^2}-\frac{1}{(u-\alpha)^2}\right] - \left(\frac{1}{u-a}+\frac{1}{u-b}-\frac{1}{u-\alpha}\right)^2=0,$$

à laquelle on peut étendre de différentes façons les résultats obtenus ci-dessus.

L'invariant quadratique J de cette équation (*) est identiquement nul; si l'on exprime cet invariant par les racines ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 de l'équation du quatrième degré, on a

$$J=\Sigma(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2(\varepsilon_3-\varepsilon_4)^2=0 \;(^{**}),$$

relation qui, pour une équation du quatrième degré à coefficients réels, suppose deux racines réelles et deux imaginaires.

(*) *Voir* la Note placée à la fin du Mémoire.

(**) Voir *Leçons d'Algèbre supérieure* par G. Salmon, p. 172 et 180. Chez Gauthier-Villars; prix : 7 fr. 50 c.

Le même invariant s'évanouit pour l'équation suivante :

$$2\left[\frac{1}{(u-a)^2}+\frac{1}{(u-b)^2}+\frac{1}{(u-c)^2}-\frac{1}{(u-\alpha)^2}\right]$$
$$-\left(\frac{1}{u-a}+\frac{1}{u-b}+\frac{1}{u-c}-\frac{1}{u-\alpha}\right)^2=0.$$

IV.

Appelons u_1, u_2, u_3 et u_4 les racines de l'équation $\varphi(u)=0$, ces racines étant rangées par ordre de grandeur, en sorte que u_4 soit la plus grande; désignons par v_1, v_2, v_3 et v_4 les valeurs correspondantes de v définies par l'équation

$$(6)\qquad \frac{2}{u-v}=\frac{1}{u-a}+\frac{1}{u-b}+\frac{1}{u-c}-\frac{1}{u-\alpha}-\frac{1}{u-\beta}.$$

Pour $u=-\infty$, on a $v=+\infty$; quand u croît, v commence par décroître, v_1 et v_3 sont des minima, et v_2 et v_4 des maxima, et l'on a

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{l} v_1<v_2,\quad v_3<v_2,\quad v_3<v_4 \\ \text{et, d'après (9),} \\ v_1<\beta,\quad v_2>\beta,\quad v_3<\alpha,\quad v_4>\alpha; \\ \text{d'où}\quad v_4>v_1. \end{array}\right.$$

Portons sur la normale donnée, à partir du pied de cette normale (x_0, y_0, z_0), et dans un sens convenable, les longueurs

$$\frac{\alpha}{\pi},\quad \frac{\beta}{\pi},\quad \frac{v_1}{\pi},\quad \frac{v_2}{\pi},\quad \frac{v_3}{\pi},\quad \frac{v_4}{\pi}\quad (\textit{voir}\ \mathrm{I}),$$

et désignons les extrémités de ces longueurs par

$$(\alpha),\quad (\beta),\quad (v_1),\ldots.$$

D'après (17), ces points ont leurs positions relatives indiquées par le tableau suivant :

$$(-\infty)(\nu_1)(\beta)(\nu_2)(+\infty),$$
$$(-\infty)(\nu_3)(\alpha)(\nu_4)(+\infty),$$
$$(-\infty)(\nu_3)(\nu_2)(+\infty),$$
$$(-\infty)(\nu_1)(\nu_4)(+\infty).$$

Les points (ν_1), (ν_2), (ν_3) et (ν_4), qui partagent en cinq parties la normale, ne peuvent offrir que les quatre dispositions suivantes :

$$(17^*)\quad\left\{\begin{array}{l}(-\infty)(\nu_1)(\nu_3)(\nu_2)(\nu_4)(+\infty),\\ (-\infty)(\nu_1)(\nu_3)(\nu_4)(\nu_2)(+\infty),\\ (-\infty)(\nu_3)(\nu_1)(\nu_4)(\nu_2)(+\infty),\\ (-\infty)(\nu_3)(\nu_1)(\nu_2)(\nu_4)(+\infty).\end{array}\right.$$

Les deux segments $\overline{(\nu_1)(\nu_2)}$ et $\overline{(\nu_3)(\nu_4)}$ empiètent donc l'un sur l'autre, ou bien l'un est contenu dans l'autre.

Quand u croît de $-\infty$ à $+\infty$, ν varie d'une façon continue de $+\infty$ à ν_1, de ν_1 à ν_2, de ν_2 à ν_3, de ν_3 à ν_4 et de ν_4 à $-\infty$.

En se reportant au tableau précédent, on voit qu'en même temps le point (ν), extrémité de la longueur $\frac{\nu}{\pi}$, parcourt une fois les deux segments extrêmes (ceux qui s'étendent à l'infini), trois fois les segments intérieurs adjacents à ceux-ci et cinq fois le segment médial.

En appliquant ces résultats à la question proposée, nous arrivons à la conclusion suivante :

D'un point (ξ, η, ζ) de la normale donnée, on peut encore mener à l'ellipsoïde un nombre de normales réelles égal à cinq, à trois ou à un, suivant que le point (ξ, η, ζ) se trouve sur les deux segments $\overline{(\nu_1)(\nu_2)}$ et $\overline{(\nu_3)(\nu_4)}$, ou sur l'un d'eux seulement, ou enfin ne se trouve sur aucun d'eux.

Quelques formules relatives à l'ellipsoïde permettent d'exprimer simplement ces résultats; nous allons d'abord établir ces formules.

(*La suite prochainement.*)